

*Annales de la  
SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE  
de Bruxelles*

*Association sans but lucratif*

TOME SOIXANTE-QUINZIÈME

SÉRIE I

SCIENCES MATHÉMATIQUES  
ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES

TROISIÈME FASCICULE

T.75.3.

7 décembre 1961



*Publié avec le concours de la Fondation universitaire de Belgique  
et du Gouvernement*

SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE  
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11  
LOUVAIN

1961

Publication trimestrielle. Prix de ce fascicule séparé: 80 fr

## AVIS

Les périodiques internationaux de références et de bibliographie sont autorisés à reproduire, moyennant une référence, les résumés que les auteurs placent en tête de leurs travaux dans ces *Annales*.

## TABLE DES MATIÈRES

---

Session du 26 octobre 1961, à Louvain

PREMIÈRE SECTION :

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Entropie demosienne dans un système de relations, par A. SADE .....	107
Fonctions entières ou plurisousharmoniques de type exponentiel, par J. PARIS .....	113
Laguerre's Function for a Curve in a Hypersurface $V_n$ of a Riemannian $V_{n+1}$ , by M.K. SINGAL .....	123
Sur la statistique du vent, par O. GODART .....	128
Le coefficient d'échange de la diffusion atmosphérique, par O. GODART.	148

DEUXIÈME SECTION : SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES

Un oculaire compensateur de mesure du type Huyghens pour objectifs apochromatiques de microscope, par A. BIOT .....	160
Un oculaire du type Huyghens à lentille de champ achromatisée, par A. BIOT .....	164
L'aberration chromatique latérale de l'oculaire de Ramsden, par A. BIOT.	167
Mesures de corrélation angulaire $\beta-\gamma$ polarisé circulaire sur $Re^{186}$ , par M. DELABAYE, J. DEUTSCH et P. LIPNIK .....	171
Spectre de rotation du bromure de vinyle enrichi en Carbone 13, par R.E. GOEDERTIER .....	174
Remarques sur les spectres infrarouges des bromures de vinyle deutéro- substitués, par C.P. COURTOY .....	183
Une méthode de mesure des sections efficaces d'échange de charge, par J. STEYAERT, J. BOUCHAT et J.M. DELFOSSE .....	188
Corrélation directionnelle bêta-gamma dans $Ho^{166}$ , par J.P. DEUTSCH, L. GRENACS et P. LIPNIK .....	191
Spectres de rotation des bromures de vinyle en micro-ondes dans l'état fondamental et dans un état vibrationnel excité, par S. de HEPCÉE.	194
Table des Matières du tome 75 .....	212

---

Le prix d'ABONNEMENT aux ANNALES, série I, pour des personnes  
ne faisant pas partie de la Société scientifique, est fixé comme suit :

en Belgique et au Luxembourg	100 F
dans les autres pays	150 F

SESSION DU 26 OCTOBRE 1961

à Louvain

Première Section  
SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Entropie demosienne dans un système de relations

PAR

Albert SADE

**1. Définitions.** Etant donnés deux ensembles quelconques  $E$  et  $F$ , si l'on considère un élément  $a \in E$  et un élément  $b \in F$ , il peut arriver qu'entre ces deux éléments  $a$  et  $b$  il existe, ou non, une certaine manière d'être appelée *prédictat* ([<sup>9</sup>], p. 327). Le symbole par lequel on désigne un prédictat s'appelle encore un prédictat ([<sup>2</sup>], p. 4). Par exemple  $E$  et  $F$  sont deux solides,  $0$  un point fixe,  $a$  un point de  $E$ ,  $b$  un point de  $F$ ; alors  $a$  et  $b$  peuvent être, ou non, alignés avec  $0$ . Dans le premier cas on dira qu'il existe une *relation binaire*,  $R$ , entre  $a$  et  $b$  et on notera ce fait  $a R b$  ou  $R(a, b)$ .

L'ensemble des couples  $a \in E, b \in F$  entre lesquels existe la relation  $R$  est une partie de l'ensemble produit  $EF$  et s'appelle l'*ensemble représentatif* de la relation ([<sup>3</sup>], p. 77). Par ellipse ([<sup>4</sup>], p. 1413) on identifie souvent la relation à son ensemble représentatif; ainsi on parlera de la relation

$$R = [(a, b), (a', b'), (a'', b''), \dots].$$

Toute relation  $R$  associe à chaque élément  $a \in E$  un sous-ensemble — peut-être vide — de  $F$ , consistant en tous les éléments de  $F$  qui ont, avec  $a$ , la relation  $R$ . On peut donc encore considérer une relation comme une *correspondance* entre éléments de  $E$  et éléments de  $F$ . Une telle représentation des relations peut être illustrée graphiquement par deux droites parallèles  $D$  et  $\Delta$ . Les éléments de  $E$  sont figurés par des points de  $D$  et ceux de  $F$  par des points de  $\Delta$ . Si  $a \in E$  et  $b \in F$  on joindra  $a$  et  $b$  par un segment toutes les fois que l'on aura  $aRb$ .

Les ensembles E et F peuvent être un même ensemble. On construit alors le *graphe* de la relation en représentant les éléments de E (= F) par des points et en joignant au moyen d'un vecteur tout point à son image par la correspondance R. Réciproquement il est clair que tout graphe représente une relation entre les éléments d'un même ensemble. Le schéma défini plus haut dans le cas de deux ensembles peut, à la rigueur, s'appeler encore un graphe.

Tous ces concepts sont équivalents; ils représentent quatre aspects : logique, ensembliste, algébrique, topologique de la théorie des relations. Mais en changeant de représentation et en donnant des définitions sincères on s'aperçoit que des notions artificielles et alambiquées (équivalences «associables»), deviennent simples et naturelles et il peut arriver qu'une telle modification de point de vue amène des rapprochements et des progrès inattendus.

La notion de relations se généralise sans peine au cas de  $n$  ensembles,  $E_i = (a_i, b_i, \dots)$ ; ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ). On a alors une relation  $n$ -places ([<sup>2</sup>], p. 5), ou  $n$ -aire. On indique que l'ensemble ordonné  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ , ( $a_i \in E_i$ ), satisfait à la relation  $n$ -aire R au moyen de la notation  $R(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , ([<sup>2</sup>], p. 5; [<sup>9</sup>], p. 327). S'il ne s'agit que d'une seule relation, on peut supprimer le symbole R et écrire  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ , [<sup>10</sup>].

Le signe R peut avoir trois significations :

1<sup>o</sup> R signifie le prédicat, ou la relation R.

2<sup>o</sup> R exprime la validité du prédicat pour une  $n$ -ade donnée,  $R(a_1, a_2, \dots, a_n) \Leftrightarrow$  les éléments  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ont entre eux la relation R.

3<sup>o</sup> R représente le sous-ensemble de l'ensemble produit  $E_1 E_2 E_3 \dots E_n$  formé de toutes les  $n$ -ades ordonnées qui satisfont à cette relation.

$$R = \{\langle a_1, \dots, a_n \rangle, \langle b_1, \dots, b_n \rangle, \dots\} \subseteq E_1 E_2 E_3 \dots E_n.$$

En général, pour un  $n$ -uple donné  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  il n'y a que deux possibilités : ou ses éléments vérifient R, ou non. Si  $\sim R$  est la négation de R, les sous-ensembles R et  $\sim R$  sont complémentaires dans l'ensemble produit. Mais on peut concevoir que les objets du  $n$ -uple  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  puissent offrir *plusieurs manières d'être* au lieu de deux. Alors la relation correspondante sera une partition de l'ensemble produit  $E_1 E_2 \dots E_n$  (en  $k$  blocs au lieu de deux), ou une application de cet ensemble produit sur l'ensemble  $L = 1, 2, 3, \dots, k$  ([<sup>1</sup>]).

Si  $n = 3$ , et si les trois ensembles  $E_1, E_2, E_3$  coïncident, on peut représenter la relation par un multigroupe ( [<sup>8</sup>], p. 640, n° 12), c'est-à-dire un ensemble E muni d'une opération binaire ( $\times$ ) où le composé de deux éléments,  $a \times b$ , est un sous-ensemble, pouvant être vide, de E. (Le préfixe «hyper», parfois employé, semble particulièrement mal choisi : on ne voit pas en quoi les qualités des groupes, par exemple, sont portées à leur plus haut point de perfection dans un «hypergroupe»).

Deux relations  $n$ -aires sont *disjointes* si elles ne possèdent aucun  $n$ -uple commun.

Etant donnée une relation binaire  $R \subseteq EF$  entre éléments d'un ensemble  $E$  et éléments d'un ensemble  $F$ , soient  $G \subseteq E$  et  $H \subseteq F$  des sous-ensembles de  $E$  et de  $F$  respectivement, tels que  $GH \subseteq R$ ; alors  $GH$  s'appelle un *rectangle dans  $R$* . A tout élément de  $G$  la relation  $R$  fait correspondre comme image chacun des éléments de  $H$  ([<sup>6</sup>], p. 122). Un tel rectangle est *maximal* s'il coïncide avec tout rectangle le contenant ([<sup>6</sup>], p. 132).

Un rectangle  $GH$  appartenant à une relation  $R$  sur un seul ensemble  $E$ , ( $R \subseteq EE$ ), s'appelle un *carré* si  $G = H$ , c'est-à-dire s'il contient tous les couples d'éléments  $\in G$  ([<sup>6</sup>], p. 122).

Une relation  $R \subseteq EE$  est *fermée* ([<sup>5</sup>]), ou *difonctionnelle* ([<sup>6</sup>], p. 132) si les images de deux éléments distincts du premier ensemble sont toujours des parties disjointes, ou confondues, du second.

Si  $R$  est l'ensemble des  $n$ -uples  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ , ( $a_i \in E_i$ ) et  $S$  celui des  $n$ -uples  $\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ , ( $b_i \in F_i$ ), le *produit direct* des relations  $n$ -aires  $R$  et  $S$  est la relation  $T = R \circ S$  représentée par l'ensemble des  $n$ -uples

$$\langle (a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n) \rangle, (a_i, b_i) \in E_i F_i.$$

C'est la généralisation du produit direct de deux applications ([<sup>7</sup>] p. 80, n° 9-1).

Dans le cas particulier où  $n = 3$  et  $E_1 = E_2 = E_3$ ,  $F_1 = F_2 = F_3$ , la relation  $R \circ S$  est représentée par le multigroupe obtenu en construisant le produit direct (au sens usuel) des multigroupes qui représentent  $R$  et  $S$ .

Soit  $n$  pair, ( $n = 2p$ ). Le *produit relatif* de  $R$  par  $S$  est alors la relation  $R|S$  représentée par l'ensemble des  $n$ -uples

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_p, b_{p+1}, b_{p+2}, \dots, b_n \rangle, a_i \in E_i, b_j \in F_j,$$

$$i = 1, 2, \dots, p; \quad j = p + 1, p + 2, \dots, n.$$

tels que

$$R(a_1, a_2, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_{2p}),$$

$$S(a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_{2p}, b_{p+1}, b_{p+2}, \dots, b_{2p}).$$

Si  $p = 1$ , on retrouve la définition usuelle ([<sup>6</sup>], p. 117).

Les ensembles  $E_i$  peuvent coïncider. Une relation  $R$ , sur un tel ensemble  $E$  est *idempotente* si elle coïncide avec son carré relatif :  $R = R|R$ .

**2. Quelques propriétés.** *Le produit direct de deux relations fermées sur des ensembles disjoints est une relation fermée.*

Soit  $\rho = R \circ R_1$ ,  $R$  et  $R_1$  fermées, entre  $E$ ,  $F$  et entre  $E_1$ ,  $F_1$  resp.,  $E \cap E_1 = F \cap F_1 = \emptyset$ .

On a donc

$$\begin{aligned} aRb \wedge a_1R_1b_1 &\Leftrightarrow (a, a_1) \rho (b, b_1), \\ aR \cap cR &\neq \emptyset \Rightarrow aR = cR, \\ aR_1 \cap cR_1 &\neq \emptyset \Rightarrow a_1R_1 = c_1R_1, \end{aligned}$$

où  $aR$  représente l'ensemble des images de  $a$  par  $R$ .

Supposons

$$(a, a_1) \rho \cap (c, c_1) \rho \neq \emptyset.$$

Par définition

$$(a, a_1) \rho = (aR, a_1R_1); (c, c_1) \rho = (cR, c_1R_1).$$

Donc

$$(a, a_1) \rho \cap (c, c_1) \rho \neq \emptyset \Leftrightarrow (aR, a_1R_1) \cap (cR, c_1R_1) \neq \emptyset.$$

A cause de la disjonction des ensembles  $E, E_1$ , d'une part et  $F, F_1$  de l'autre, cela entraîne

$$aR \cap cR \neq \emptyset \wedge a_1R_1 \cap c_1R_1 \neq \emptyset,$$

donc, par hypothèse,

$$aR = cR \wedge a_1R_1 = c_1R_1,$$

et par conséquent

$$(aR, a_1R_1) = (cR, c_1R_1),$$

ou enfin

$$(a, a_1) \rho = (c, c_1) \rho. \text{ Q.E.D.}$$

La propriété ne serait plus nécessairement vraie si les ensembles de départ (ou d'arrivée) n'étaient pas disjoints. Exemple, avec :

$$R = (0, a), (0, b), (1, c), (2, c).$$

$$R_1 = (3, d), (3, f), (3, g), (4, d), (4, f), (4, g)$$

la proposition est vérifiée. Mais si l'on suppose  $a = d$ ,  $c = f$ , alors

$$(0, 3) \rho \cap (1, 4) \rho \neq \emptyset$$

et pourtant

$$(0, 3) \rho \neq (1, 4) \rho.$$

*Le produit direct de deux relations fermées sur des ensembles disjoints est la somme des produits directs de chaque relation rectangle maximum de la première par chaque relation rectangle maximum de la seconde.*

Il suffit de montrer que, si une relation est la somme de deux relations rectangles disjointes  $R_1 = E_1F_1$  et  $R_2 = E_2F_2$ , les produits directs

de ces relations par une relation rectangle  $R = EF$ , sont encore deux relations rectangles disjointes. Or, par hypothèse

$$E_1 \cap E_2 = F_1 \cap F_2 = \emptyset$$

$$R_1 \circ R = (E_1 E)(F_1 F); R_2 \circ R = (E_2 E)(F_2 F),$$

où  $E_1 E$  désigne l'ensemble produit de  $E_1$  par  $E$ . Ces deux relations n'ont aucun élément commun car,

$$(e_1, e), (f_1, f) = (e_2, e')(f_2, f') \Leftrightarrow e_1 = e_2, \dots$$

Or  $E_1$  et  $E_2$  sont disjoints.

*Le produit direct et le produit relatif satisfont à la loi d'entropie demosienne* ([8], p. 644, n° 17; [3 bis], p. 444)

$$(R|S) \circ (T|U) = (R \circ T)|(S \circ U)$$

Soient

$$R(a_1, a_2, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_{2p})$$

$$S(a_{p+1}, \dots, a_{2p}, b_{p+1}, \dots, b_{2p}),$$

donc

$$(R|S)(a_1, a_2, \dots, a_p, b_{p+1}, \dots, b_{2p}),$$

$$T(c_1, c_2, \dots, c_p, c_{p+1}, c_{p+2}, \dots, c_{2p}),$$

$$U(c_{p+1}, \dots, c_{2p}, d_{p+1}, \dots, d_{2p}),$$

$$(T|U)(c_1, c_2, \dots, c_p, d_{p+1}, \dots, d_{2p}).$$

Le produit direct sera

$$(R|S) \circ (T|U) [(a_1, c_1), (a_2, c_2), \dots, (a_p, c_p), (b_{p+1}, d_{p+1}), \dots, (b_{2p}, d_{2p})]$$

D'autre part

$$R, T \Rightarrow (R \circ T) [(a_1, c_1), (a_2, c_2), \dots, (a_p, c_p), (a_{p+1}, c_{p+1}), \dots, (a_{2p}, c_{2p})]$$

et de même,

$$S, U \Rightarrow (S \circ U) [(a_{p+1}, c_{p+1}), \dots, (a_{2p}, c_{2p}), (b_{p+1}, d_{p+1}), \dots, (b_{2p}, d_{2p})].$$

donc enfin, pour le produit relatif

$$(R \circ T)|(S \circ U) [(a_1, c_1), (a_2, c_2), \dots, (a_p, c_p), (b_{p+1}, d_{p+1}), \dots, (b_{2p}, d_{2p})],$$

ainsi,

$$(R|S) \circ (T|U) = (R \circ T)|(S \circ U).$$

Cette égalité est self-duale.

Si  $\Pi$  exprime le produit relatif, on démontre par induction que

$$(\Pi R) \circ (\Pi T) = \Pi(R \circ T);$$

En effet

$$[(\Pi R)|S] \circ [(\Pi T)|U] = [(\Pi R) \circ (\Pi T)]|(S \circ U) = \Pi(R \circ T)|(S \circ U).$$

Si  $\overset{*}{\Pi}$  désigne le produit direct, on aura l'identité duale

$$(\overset{*}{\Pi}R)(\overset{*}{\Pi}T) = \overset{*}{\Pi}(R|T)$$

Car

$$\begin{aligned} [(\overset{*}{\Pi}R) \circ S] [(\overset{*}{\Pi}T) \circ U] &= [(\overset{*}{\Pi}R)(\overset{*}{\Pi}T)] \circ (S|U) \\ &= [\overset{*}{\Pi}(R|T)] \circ (S|U). \end{aligned}$$

En particulier,  $R^m$  désignant la puissance fournie par le produit relatif  $(R|R)|R\dots$  et  $R[m]$  celle que donne le produit direct  $(R \circ R) \circ R\dots$ , on aura

$$R^m \circ T^m = (R \circ T)^m$$

et

$$R[m]|T[m] = (R|T)[m].$$

Observons enfin que si  $R$  est une somme de deux fermetures carrées (difonctionnelle idempotente), le produit direct par  $R$  est distributif par rapport au produit relatif, et que le carré direct de  $R$  est encore idempotent, car l'identité générale devient

$$(R_1|R_2) \circ R = (R_1 \circ R)|(R_2 \circ R),$$

et, en remplaçant  $R_1$  et  $R_2$  par  $R$ ,

$$R \circ R = (R \circ R)^2.$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] KARL EGIL AUBERT, on the foundation of the theory of relations and the logical independence of generalized concepts of reflexivity, symmetry and transitivity, *Arch. Math. Naturvid.*, **52**, (1954), 9-56.
- [2] RUDOLF CARNAP, Introduction to symbolic logic and its applications, New York, (1958).
- [3] ALBERT CHÂTELET, Arithmétique et Algèbre, Paris, 1954, T.I.
- [3] bis. I. M. H. ETHERINGTON, Non associative arithmetics, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **62**, (1949) 442-453.
- [4] ABRAHAM GINZBURG, Systèmes multiplicatifs de relations. Boucles quasi-associatives, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **250**, (1960), 1413-1416.
- [5] KATUZI ONO, On some properties of binary relations, *Nagoya Math. Journ.* **12**, (1957), 161-170.
- [6] J. RIGUET, Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois. *Bull. Soc. math. de France*, **76**, (1948), 114-155.
- [7] ALBERT SADE, Théorie des nuclei de groupoïdes et de quasigroupes,  $\mathfrak{N}_H$ ,  $\mathfrak{N}_Q$ ,  $\mathfrak{N}_C$ , *Rev. Fac. Sci. Istanbul*, Sie A, **23**, (1958), 73-103.
- [8] ALBERT SADE, Théorie des systèmes demosoiens de groupoïdes, *Pacific J. Math.* **10**, (1960), 625-660.
- [9] JOSÉ SEBASTIAO E SILVA, Su gli automorphismi di un sistema matematico qualunque, *Commentationes Pontificia Acad. Sci.* **9**, (1945), 327-357.
- [10] S. SWIERCZKOWSKI, On cyclic ordering relations, *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III*, **4**, (1956), 585-586.

## Fonctions Entières ou Plurisousharmoniques de Type Exponentiel

PAR

J. PARIS

1. On connaît la représentation potentielle des fonctions entières et des fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini énoncée dans [6,7,8,9] par Mr. Lelong. Nous nous proposons d'appliquer cette représentation au problème de la différence de deux fonctions entières ou plurisousharmoniques de type exponentiel.

2. Nous nous plaçons dans l'espace  $C^n$  du point  $z = (z_1, z_2, z_n)$ .

Rappelons que la moyenne  $\lambda[V, O, R] = \frac{1}{s_{2n}} \int_{|a|=1} V(R\alpha_K) ds_{2n}(\alpha_K)$

d'une fonction  $V$  plurisousharmonique dans  $C^n$ , prise sur la sphère  $S(O, R)$ , frontière de la boule  $B(O, R)$  de centre l'origine et de rayon  $R$ , est une fonction convexe croissante de  $\log R$  [5]. ( $s_{2n}$  désigne la mesure

de  $S(O, 1)$ ,  $s_{2n} = \frac{2\pi^n}{(n-1)!}$ ). De plus, en posant  $v(R) = \frac{\partial \lambda}{\partial \log R}$ , on a

$\mu(R) = \int_{B(O, R)} d\mu = \frac{v(R) R^{2n-2}}{2n-2}$  où  $d\mu$  est la mesure associée à la

décomposition de F. Riesz de  $V$ . En particulier, si  $V = \log |F|$ ,  $F$  entière,

alors  $d\mu = \frac{d\sigma}{s_{2n-2}}$  où  $d\sigma$  représente l'aire de l'ensemble analytique

$F = 0$  [5].

Le noyau des potentiels de l'espace  $R^{2n}$  sera noté  $h(a, z) = |z - a|^{2-2n}$ . Le noyau primaire de genre l'entier  $q \geq 0$  est la fonction définie pour  $|a| \neq 0, z \neq a$ , par

$$h(a, z, q) = -|z - a|^{2-2n} + \sum_{K=0}^q P_K(z_j, \bar{z}_j, a) = -\sum_{K=q+1}^{\infty} P_K(z_j, \bar{z}_j, a)$$

obtenue, au signe près, par suppression dans le développement du noyau  $h(a, z)$  en série de polynômes homogènes, des termes de degré  $q$  au plus [8].

La fonction

$$g(R, a, z) = h(a, z) - k_R(a, z) = |z - a|^{2-2n} - R^{2n-2} |a|^{2-2n} |z - a'|^{2-2n} \quad (1)$$

est la fonction de Green de la boule  $B(O, R)$ . En procédant comme plus haut, on aura :

$$k_R(a, z, q) = R^{2n-2} |a|^{2-2n} [-|z - a'|^{2-2n} +$$

$$\sum_{K=0}^q P_K(z_j, \bar{z}_j, a') = R^{2n-2} |a|^{2-2n} [-\sum_{K=q+1}^{\infty} P_K(z_j, \bar{z}_j, a')] \quad (2)$$

L'ordre d'une fonction  $V$  plurisousharmonique est défini en posant  $V^+ = \sup (V, 0)$ ,  $M(R) = \sup_{|z| \leq R} V^+(z)$ , par

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\log M(R)}{\log R} = s.$$

Le type  $t$  d'une fonction  $V$  plurisousharmonique d'ordre  $\rho > 0$  est défini par

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{M(R)}{R^\rho} = t.$$

Une fonction  $V$  plurisousharmonique sera dite de type exponentiel si son ordre est au plus égal à 1 et son type fini. Ces définitions contiennent les définitions classiques des fonctions entières.

Les notations  $O$  et  $o$  ont leur signification habituelle. La notation  $f(x) \leq O(g(x))$  signifie que le rapport  $\frac{f(x)}{g(x)}$  est borné supérieurement.

3. Nous allons d'abord donner une démonstration complète du théorème de représentation énoncé par Mr Lelong.

*Si  $F(z) = F(z_1, z_2, z_n)$  est une fonction entière ne s'annulant pas à l'origine et s'il existe un entier  $q \geq 0$  tel que*

a)  $\lambda [\log^+ |F|, O, R] = o(R^{q+1})$

b)  $\int_1^\infty \frac{v(t)}{t^{q+2}} dt < \infty$

*On a uniformément sur tout compact de l'espace*

$$\log |F(z)| = \operatorname{Re} \Pi_q(z) + \int d\mu(a) h(a, z, q) \quad (3)$$

*où  $\Pi_q(z)$  est le polynôme des seuls  $z_j$ , de degré  $q$  au plus, défini par*

$$\Pi_q(z) = \log |F(O)| + 2 \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial \log |F(O)|}{\partial z_j} + \dots + \frac{2}{q!} \left[ \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial \log |F(O)|}{\partial z_j} \right]^{(q)}.$$

## DÉMONSTRATION

Considérons la décomposition de F. Riesz de  $\log |F|$  faite à partir du noyau de Poisson et de la fonction de Green de la boule  $B(O, R)$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \log |F(z)| &= \frac{1}{s_{2n}} \int_{|\alpha|=1} \log |F(R\alpha_K)| \frac{(R^2 - r^2) R^{2n-2}}{|z - R\alpha_K|^{2n}} ds_{2n}(\alpha_K) + \\ &\quad \int_{B(O, R)} d\mu(a) [|z - a|^{2-2n} - R^{2n-2} |a|^{2-2n} |z - a'|^{2-2n}] \end{aligned} \quad (4)$$

Dans la suite, nous désignerons par  $H(z)$  la fonction harmonique premier terme du second membre.

Nous allons d'abord montrer :

**LEMME 1.** Si l'hypothèse a) de l'énoncé est satisfaite et si  $d\mu$  est la mesure associée à la décomposition de F. Riesz de  $\log |F|$ , l'intégrale  $\int_{B(O, R)} d\mu(a) k_R(a, z, q)$  converge vers zéro uniformément sur tout compact de  $C^n$ .

Montrons d'abord qu'il existe une constante  $K(n, q)$  telle que

$$|a|^{2n-2} k_R(a, z, q) \leq K(n, q) \left( \frac{r}{R} \right)^{q+1} \left( 1 - \frac{r}{R} \right)^{-(q+1)} |z| \leq r \quad (5)$$

Remarquons que, eu égard à la forme des polynômes  $P_K$ , il suffit de vérifier cette relation pour  $q = 0$ . Dans ce cas, il vient, puisque  $|a'| > R$ ,

$$R^{2n-2} [|a'|^{2-2n} - |z - a'|^{2-2n}] \leq 1 - |a'|^{2n-2} |z - a'|^{2-2n} \leq 1 - [|z| |a'|^{-1} + 1]^{2-2n}$$

Mais comme  $\frac{|z|}{|a'|} \leq \frac{r}{R} < 1$ , la dernière relation est elle-même inférieure à

$$1 - \left[ 1 + \frac{r}{R} \right]^{2-2n} \leq K(n) \frac{r}{R - r}$$

Nous déduisons de la relation (5)

$$\int_{B(O, R)} d\mu(a) k_R(a, z, q) \leq K(n, q) \left( \frac{r}{R} \right)^{q+1} \left( 1 - \frac{r}{R} \right)^{-(q+1)} \int_0^R \frac{d\mu(a)}{|a|^{2n-2}}$$

En intégrant par parties et en remarquant que  $\mu(a)$  est nulle au voisinage de l'origine, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{B(O, R)} d\mu(a) k_R(a, z, q) &\leq K(n, q) \left( \frac{r}{R} \right)^{q+1} \left( 1 - \frac{r}{R} \right)^{-(q+1)} \left[ \frac{\mu(R)}{R^{2n-2}} + \right. \\ &\quad \left. + (2n-2) \int_0^R \frac{\mu(a)}{|a|^{2n-1}} da \right] \end{aligned}$$

Mais l'hypothèse a) entraîne  $v(R) = o(R^{q+1})$  ou  $\mu(R) = o(R^{2n+q-1})$ . Par suite, le second membre de la dernière relation tend vers zéro quand  $R$  tend vers l'infini, quel que soit  $r$ .

**LEMME 2.** Si l'hypothèse a) de l'énoncé est satisfaite et si  $d_z$  désigne la différentielle par rapport aux  $z_j$  seuls, on a  $\lim_{R \rightarrow \infty} |d_z^{q+1} H(z)| = 0$  uniformément sur tout compact de  $C^n$ .

Prenons d'abord  $q = 0$ . Nous avons :

$$|d_z H(z)| = \frac{1}{s_{2n}} \int_{|\alpha|=1} |\log F(R\alpha_K)| dz \frac{(R^2 - r^2) R^{2n-2}}{|z - R\alpha_K|^{2n}} ds_{2n}(\alpha_K)$$

La différentielle du second membre se calcule facilement en posant  $\frac{r}{R} = c < 1$  et  $\theta = z \bar{\alpha}$ . En effet, le noyau devient  $\frac{1 - c^2}{(1 + c^2 - 2c \cos d)^n}$

et les opérateurs  $\frac{\partial}{\partial z_K}$  et  $\frac{d}{dc}$  sont liés par la relation

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_K} &= \frac{\bar{z}_K}{z_K - R} \frac{d}{dc} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_K} &= \frac{1 - d}{R} \end{aligned}$$

On voit aisément qu'il existe une constante  $K(n)$  telle que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dc} \frac{1 - c^2}{(1 + c^2 - 2c \cos d)^n} &= \\ &= 2 \frac{c^3(n-1) - (n-2)c^2 \cos d - (n+1)c + n \cos d}{(1 + c^2 - 2c \cos d)^{n+1}} \leq \frac{K(n)}{(1 - c)^{2n+3}} \end{aligned}$$

Dès lors, nous avons :

$$|d_z H(z)| \leq \frac{K(n) \sum_{K=1}^n dz_K | \lambda[\log^+ |F|, O, R] |}{(1 - c)^{2n+3}}$$

et l'hypothèse a) donne alors le résultat.

Si  $q > 1$ , on obtiendra le résultat en remarquant qu'à chacune des dérivations successives du noyau par rapport à  $c$ , le degré du numérateur reste le même tandis que celui du dénominateur augmente d'une unité.

Pour compléter la démonstration du théorème, différentions  $q + 1$  fois les deux membres de la relation (4). Nous obtenons :

$$\begin{aligned} d_z^{q+1} \log F &= 2d_z^{q+1} \log |F| = \\ &= 2d_z^{q+1} H(z) - 2 \int_{B(O, R)} d_z^{q+1} [h(a, z) - k_R(a, z)] d\mu(a). \end{aligned}$$

Les formules 1 et 2 permettent d'écrire :

$$-d_z^{q+1} h(a, z) = d_z^{q+1} h(a, z, q)$$

$$-d_z^{q-1} k_R(a, z) = d_z^{q-1} k_R(a, z, q)$$

En appliquant les lemmes 1 et 2, il vient :

$$d_z^{q+1} \log F = \lim_{R \rightarrow \infty} 2 \int_{B(O, R)} d_z^{q+1} h(a, z, q) d\mu(a)$$

On en déduit que  $\log F$  et  $\lim_{R \rightarrow \infty} 2 \int_{B(O, R)} h(a, z, q) d\mu(a)$  ne diffèrent

que par un polynôme homogène  $\Pi_q$  des seuls  $z_j$  de degré  $q$  au plus. Puisque le degré de tous les termes de  $h(a, z, q)$  est supérieur à  $q + 1$ , on voit que les coefficients du polynôme sont déterminés uniquement à partir de  $F$  en posant  $z = 0$  dans les différentiations successives.

Par conséquent,

$$\log |F| = \operatorname{Re} \Pi_q(z) + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B(O, R)} h(a, z, q) d\mu(a).$$

La limite du second membre existe effectivement en vertu de l'hypothèse b) car l'intégrale du second membre converge alors absolument et uniformément pour  $|z| \leq r < R$ . En effet, on a la majoration (8)

$$|h(a, z, q)| \leq K(n, q) \frac{|z|^{q+1}}{|a|^{2n+q-1}}$$

et en vertu de l'hypothèse b)

$$\int_{B(o, R)} |h(a, z, q)| d\mu(a) \leq K(n, q) |z|^{q+1} \int_R^\infty \frac{d\mu(a)}{|a|^{2n+q-1}} < \infty$$

#### 4. THÉORÈME 1

Pour qu'une fonction entière, ne s'annulant pas à l'origine, d'ordre entier  $\rho$ , soit de type fini, il faut et il suffit que l'on ait :

a)  $v(R) = O(R^\rho)$

b)  $\int_{A \cap B(O, R)} d\mu(a) P_\rho(z_j, \bar{z}_j, a) = O(R^\rho) \quad |z| \leq R$

A est l'ensemble analytique  $F = 0$  et  $P_\rho$  le polynôme de degré  $\rho$  qui intervient dans le noyau primaire.

## DÉMONSTRATION

L'entier  $q$  qui figure dans la représentation potententielle est toujours au plus égal à  $\rho$ . Nous traiterons uniquement le cas  $q = \rho$ . Le cas où  $q$  serait égal à  $\rho - 1$  se traite d'ailleurs de façon entièrement analogue.

Condition nécessaire.

Désignons par  $(u_j)$  la suite des zéros de  $F$  situés sur la droite complexe  $z_K = z_K u \left( \sum_{K=1}^n z_K \right) = 1$ ,  $u$  paramètre complexe, rangés par ordre de module croissant et comptés avec leur degré de multiplicité. Soit  $n(r, z_K)$  le nombre de ceux dont le module est inférieur à  $r$ . Nous avons [5]

$$v(r) = \int_{|z|=1} n(r, z_K) dm$$

où  $dm$  est le quotient par  $s_{2n}$  de l'ensemble d'intersection de  $S(O, 1)$  avec le faisceau de droites issues de l'origine et qui coupent l'ensemble analytique  $F = 0$ . Fixons  $R > 0$  et posons  $n(R, z_K) = n$ . Pour toute direction  $(z)$  nous avons la suite des inégalités :

$$\frac{R^j}{|u_j|^j} \leq \frac{R^j}{|u_1 u_2 \dots u_j|} \leq \frac{R^n}{|u_1 u_2 \dots u_n|} \leq e^{KR^\rho}$$

d'où il vient :

$$\frac{R^{j\rho}}{|u_j|^j} \leq e^{KR^\rho}$$

En prenant  $R = \left(\frac{j}{K}\right)^{1/\rho}$ , nous obtenons  $\frac{j}{|u_j|^\rho} \leq K e^\rho$ . On en déduit  $\frac{n(r, z_K)}{r^\rho} \leq k_1$  et  $\frac{v(r)}{r^\rho} \leq k_1$ . Ainsi, la condition a) est satisfaite.

Extrayons du polynôme  $\Pi_\rho$  l'ensemble  $p$  des termes de degré  $\rho$ . Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \log |F(z)| - Rep_\rho(z) &= \int_{A \cap B(O, R)} d\mu(a) P_\rho(z_j, z_j, a) = Re[\Pi_\rho(z) - p_\rho(z)] + \\ &+ \int_{A \cap B(O, R)} d\mu(a) h(a, z, \rho - 1) + \int_{A - B(O, R)} d\mu(a) h(a, z, \rho) \end{aligned}$$

Une telle décomposition est possible parce que, d'une part, la sphère  $S(O, R)$  ne porte pas une aire  $2n - 2$  dimensionnelle positive de points de  $A$  [5] et d'autre part, nous avons :

$$h(a, z, \rho) = h(a, z, \rho - 1) + P_\rho(z_j, \bar{z}_j, a)$$

En posant  $\frac{|z|}{|a|} = s \neq 1$  et  $z \hat{\circ} a = \theta$ , le noyau  $h(a, z)$  s'écrit  $|a|^{2-2n} (1 + s^2 - 2s \cos \theta)^{1-n}$ . En posant  $f(s) = (1 + s^2 - 2s \cos \theta)^{1-n}$ , le noyau primaire s'écrit :

$$h(a, z, \rho) = |a|^{2-2n} \left[ -f(s) + \sum_{K=0}^{\rho} \frac{f^{(K)}(s)}{K!} s^K \right]$$

et on a la majoration :

$$h(a, z, \rho) \leq K(n, \rho) s^{\rho+1/2} |a|^{2-2n} = K(n, \rho) |z|^{\rho+1/2} |a|^{3/2-2n-\rho}$$

Dès lors, il vient :

$$\int_{A \cap B(O, R)} d\mu(a) h(a, z, \rho - 1) \leq K(n, \rho) \int_0^R |z|^{\rho-1/2} \frac{d\mu(a)}{|a|^{2n+\rho-5/2}}$$

En intégrant par parties et en tenant compte de ce que  $\mu(a)$  est nulle au voisinage de l'origine et satisfait  $\frac{\mu(a)}{|a|^{2n+\rho-2}} \leq k_1$  par la première partie de la démonstration, nous obtenons :

$$\int_{A \cap B(O, R)} d\mu(a) h(a, z, \rho - 1) \leq K(n, \rho) |z|^{\rho-1/2} R^{1/2} \quad (6)$$

De la même manière, il vient :

$$\int_{A - B(O, R)} d\mu(a) h(a, z, \rho) \leq K'(n, \rho) |z|^{\rho+1/2} R^{-1/2} \quad (7)$$

En prenant  $|z| = R$ , nous avons :

$$\int_{A \cap B(O, R)} d\mu(a) h(a, z, \rho - 1) + \int_{A - B(O, R)} d\mu(a) h(a, z, \rho) \leq K(n, \rho) R^\rho$$

En procédant comme pour  $n = 1$ , on peut montrer que si  $F$  est une fonction entière telle que  $F(O) = 1$  et si c'est un nombre positif, l'ensemble fermé, formé des points de  $S(O, R)$  en lesquels on a  $|F(z)| \leq \sup_{|z| \leq R} |F(z)|^{-c}$  a une mesure inférieure à  $\frac{s_{2n}(R)}{c+1}$ .

On en déduit que la relation

$$\int_{A \cap B(O, R)} d\mu(a) h(a, z, \rho - 1) + \int_{A - B(O, R)} d\mu(a) h(a, z, \rho) \geq -c K(n, \rho) R^\rho \quad (8)$$

a lieu sur un ensemble de points de  $S(O, R)$  de mesure supérieure à  $\frac{c}{c+1} s_{2n}(R)$ . Supposons maintenant que la condition

$\int_{A \cap B(O, R)} d\mu(a) P_\rho(z_j, \bar{z}_j, a) = O(R^\rho)$  ne soit pas satisfaite, et désignons

par  $\frac{s_{2n}(R)}{d}$  la mesure de l'ensemble des points de  $S(O, R)$  en lesquels nous avons

$$\int_{A \cap B(O, R)} d\mu(a) P_\rho(z_j, \bar{z}_j, a) \geq G(n, \rho) R^\rho \quad (9)$$

En prenant  $c > \frac{1}{d-1}$ , nous voyons qu'il existe au moins un point de  $S(O, R)$  en lequel les relations (8) et (9) sont satisfaites. En ce point, nous avons :

$$\int_{A \cap B(O, R)} d\mu(a) P_\rho(z_j, \bar{z}_j, a) + \operatorname{Re} p_\rho(z) - c K(n, \rho) R^\rho \leq \log |F(z)| \leq t R^\rho$$

et donc aussi

$$\int_{A \cap B(O, R)} d\mu(a) P_\rho(z_j, \bar{z}_j, a) \leq H(n, \rho) R^\rho$$

ce qui serait contradictoire.

Condition suffisante.

Nous pouvons toujours écrire :

$$\begin{aligned} \log |F(z)| &= \operatorname{Re} \Pi_\rho(z) + \int_{A \cap B(O, R)} d\mu(a) P_\rho(z_j, \bar{z}_j, a) + \\ &\quad + \int_{A \cap B(O, R)} d\mu(a) h(a, z, \rho - 1) + \int_{A \cap B(O, R)} d\mu(a) h(a, z, \rho) \end{aligned}$$

Chaque terme du second membre est  $\leq O(R^\rho)$ ; la première intégrale en vertu de l'hypothèse b) et les deux autres en vertu de l'hypothèse a) et des formules (6) et (7) établies dans la condition nécessaire. Ainsi, la fonction F est de type fini.

## 5. REMARQUE

Si  $\rho$  n'est pas un entier, la condition b) n'intervient pas et la condition a) reste nécessaire et suffisante pour que F soit de type fini.

6. Du théorème 1, on déduit immédiatement le théorème connu :

## THÉORÈME 2

*Si F et G sont deux fonctions entières de type exponentiel, si  $F(0) = 1$ ,  $G(0) = 1$  et si le quotient  $\frac{F}{G}$  est une fonction entière, alors elle est de type exponentiel.*

7. Le théorème 2 est un cas particulier du théorème analogue relatif aux fonctions plurisousharmoniques.

## THÉORÈME 3

*Si  $V_1$  et  $V_2$  sont deux fonctions plurisousharmoniques dans tout l'espace  $C^n$  et de type exponentiel, si  $V_1(0) > -\infty$ ,  $V_2(0) > -\infty$  et si  $V = V_1 - V_2$  est plurisousharmonique dans tout l'espace  $C^n$ , alors V est de type exponentiel.*

### DÉMONSTRATION

Le théorème de représentation des fonctions entières d'ordre fini peut être étendu aux fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini [9]. Ainsi, nous avons :

$$V_1(z) = W_1(z) + \int d\mu_1(a) h(a, z, q)$$
$$V_2(z) = W_2(z) + \int d\mu_2(a) h(a, z, q)$$

où  $W_1$  et  $W_2$  sont pluriharmoniques et où  $q$  vaut 0 ou 1.

De même, nous avons :

$$V(z) = W(z) + \int d\mu(a) h(a, z, q)$$

où  $W$  est pluriharmonique et  $q$  un entier positif ou nul.

Mais si nous appelons  $A$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  les courants, au sens de Rham, associés respectivement à  $V$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  [9], nous avons  $A = A_1 - A_2$  et  $d\mu = d\mu_1 - d\mu_2$ . Ainsi, dans la représentation de  $V$ ,  $q$  ne peut valoir que 0 ou 1, et  $V$  est de type exponentiel.

*Remarque.* Le théorème 3 a été démontré par Avanessian [1]. Sa démonstration est basée sur les propriétés des moyennes des fonctions sousharmoniques négatives.

La limitation du type  $t(V)$  en fonction des types  $t(V_1)$ ,  $t(V_2)$  qu'elle donne, n'est pas meilleure que la limitation évidente

$$t(V) \leq \sup [t(V_1), t(V_2)]$$

## RÉFÉRENCES

- [<sup>1</sup>] AVANISSIAN V., Fonction plurisousharmonique différence de deux fonctions plurisousharmoniques de type exponentiel. *C.R.Ac. Sc.* 1961.
- [<sup>2</sup>] BOAS R., Entire functions. Academic Press. 1954.
- [<sup>3</sup>] NEVANLINNA R., Eindeutige Analytische Funktionen. Springer 1936.
- [<sup>4</sup>] LELONG P., Les fonctions plurisousharmoniques. *Ann. Sc. Ecole Norm. Sup.* (62), 1945.
- [<sup>5</sup>] LELONG P., Propriétés métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (67), 1950.
- [<sup>6</sup>] LELONG P., Sur la représentation d'une fonction plurisousharmonique à partir d'un potentiel. *C.R. Acad. Sc. Paris* (237), 1953.
- [<sup>7</sup>] LELONG P., Sur l'extension aux fonctions entières de  $n$  variables d'ordre fini d'un développement canonique de Weierstrass. *C.R. Acad. Sc. Paris* (237), 1953.
- [<sup>8</sup>] LELONG P., Sur l'étude des noyaux primaires et sur un théorème de divisibilité des fonctions entières de  $n$  variables. *C.R. Acad. Sc. Paris* (237), 1953.
- [<sup>9</sup>] LELONG P., Sur l'aire des ensembles analytiques complexes. *Ann. Acad. Sc. Fennicae* 1958.

## Laguerre's function for a curve in a hypersurface $V_n$ of a Riemannian $V_{n+1}$

BY

M. K. SINGAL

1. INTRODUCTION. It is well-known that if  $n$  be the unit normal to a surface  $S$  imbedded in a Euclidean 3-space, and  $t$  the unit tangent to a curve  $C$  on  $S$ , then the Laguerre's function  $\mathfrak{L}$  for the direction  $t$  is given by

$$\mathfrak{L} = -t \cdot \left( \frac{d}{ds} \nabla n \right) \cdot t \quad (1.1)$$

where  $\frac{d}{ds}$  denotes differentiation with respect to the arc-length of  $C$  [2].

The expression on the right hand side of (1.1) depends only on the direction  $t$  and not on the other properties of  $C$ , for it does not involve the derivative of  $t$ . The object of the present paper is to obtain a corresponding expression for  $\mathfrak{L}$  when  $C$  is a curve in a hypersurface  $V_n$  of a Riemannian  $V_{n+1}$ .

2. HYPERSURFACE IN  $V_{n+1}$  [3]. Consider a hypersurface  $V_n$  of coordinates  $x^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  and positive-definite metric

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (2.1)$$

imbedded in a  $V_{n+1}$  of coordinates  $y^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, n+1$  and positive-definite metric

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta \quad (2.2)$$

For points of  $V_n$ , the  $y$ 's are expressible as functions of  $x$ 's, the matrix

$\left| \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \right|$  being of order  $n$ . The coefficients of the fundamental forms of  $V_{n+1}$  and  $V_n$  are connected by the relations

$$g_{ij} = a_{\alpha\beta} y_i^\alpha y_j^\beta \quad (2.3)$$

where  $(,)$  followed by an index indicates covariant derivative with respect to the  $x$  with that index.

If  $N^\alpha$  be the components of the unit normal to  $V_n$ , those must satisfy the relations

$$a_{\gamma\beta} N^\gamma N^\beta = 1 \quad (2.4)$$

and

$$a_{\alpha\beta} N^\alpha y^\beta_{;i} = 0 \quad (2.5)$$

The  $n + 1$  equations (2.4), (2.5) determine the components  $N^\alpha$  of the unit normal.

Also

$$y^\alpha_{;ij} = \Omega_{ij} N^\alpha \quad (2.6)$$

where  $(;)$  followed by an index denotes tensor derivative with respect to the  $x$  with that index and  $\Omega_{ij}$  are the components of a covariant tensor of the second order, symmetric in  $i$  and  $j$ .

**3. LAGUERRE'S FUNCTION.** Let  $\lambda^i_{h1}$  be contravariant components of the unit tangents to the curves  $C_h$  of an orthogonal ennuple in  $V_n$ . Denoting the normal curvature of the hypersurface in the direction of the curves  $C_h$  by  $k_h$  and the intrinsic derivatives along the curve  $\frac{d}{ds_h}$  by  $C_h$ , we have

$$-k_h = \lambda_{h1} \cdot \nabla N \cdot \lambda_{h1}, \quad (3.1)$$

and

$$\begin{aligned} -\frac{dk_h}{ds_h} &= (N^\alpha_{,\beta} \xi^\beta_{h1} \xi^\gamma_{h1\alpha})_{,\gamma} \xi^\gamma_{h1} \\ &= N^\alpha_{,\beta\gamma} \xi^\beta_{h1} \xi^\gamma_{h1\alpha} + N^\alpha_{,\beta} \xi^\beta_{h1,\gamma} \xi^\gamma_{h1\alpha} \\ &\quad + N^\alpha_{,\beta} \xi^\beta_{h1\alpha} \xi^\gamma_{h1\gamma}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

where

$$\xi^\alpha_{h1} = y^\alpha_{,i} \lambda^i_{h1}. \quad (3.3)$$

From (3.3) we have

$$\begin{aligned} \xi^\gamma_{h1,\beta} \xi^\beta_{h1} &= y^\alpha_{,i} \lambda^i_{h1,j} \lambda^j_{h1} + y^\alpha_{,ij} \lambda^i_{h1} \lambda^j_{h1}, \\ &= y^\alpha_{,i} \sum_j \gamma_{h1h} \lambda^i_{h1} + \Omega_{ij} \lambda^i_{h1} \lambda^j_{h1} N^\alpha, \\ &\quad \sum_i \gamma_{h1h} \xi^\alpha_{h1} + k_h N^\alpha \end{aligned} \quad (3.4)$$

Also

$$N_{,\beta}^{\alpha} \xi_{h1}^{\beta} = - \sum_l \omega_{hl} \xi_{l1}^{\alpha}, \quad (3.5)$$

where

$$\omega_{hl} = \Omega_{ij} \lambda_{h1}^i \lambda_{l1}^j.$$

Using (3.4) and (3.5) we may write (3.2) as

$$\begin{aligned} \frac{dk_h}{ds_h} &= N_{,\beta\gamma}^{\alpha} \xi_{h1}^{\beta} \xi_{h1}^{\gamma} \xi_{h1\alpha} + N_{,\beta}^{\alpha} \xi_{h1\alpha} \left( \sum_l \gamma_{hlh} \xi_{l1}^{\beta} + k_h N^{\beta} \right) \\ &\quad - \left( \sum_l \omega_{hl} \xi_{l1}^{\alpha} \right) \left( \sum_l \gamma_{hlh} \xi_{l1\alpha} + k_h N_{\alpha} \right) \\ &= N_{,\beta\gamma}^{\alpha} \xi_{h1}^{\beta} \xi_{h1}^{\gamma} \xi_{h1\alpha} + \sum_l \gamma_{hlh} \left( \sum_p \omega_{lp} \xi_{p1}^{\alpha} \right) \xi_{h1\alpha} \\ &\quad + \sum_l \omega_{hl} \gamma_{hlh} + N_{,\beta}^{\alpha} N^{\beta} \xi_{h1\alpha} k_h \\ &= N_{,\beta\gamma}^{\alpha} \xi_{h1}^{\alpha} \xi_{h1}^{\beta} \xi_{h1}^{\gamma} + 2 \sum_l \gamma_{lh} \omega_{lh} + N_{,\beta}^{\alpha} N^{\beta} \xi_{h1}^{\alpha} k_h \end{aligned} \quad (3.6)$$

or

$$\frac{dk_h}{ds_h} + 2 \sum_l \gamma_{lh} \omega_{lh} = - (N_{,\beta\gamma}^{\alpha} \xi_{h1}^{\alpha} \xi_{h1}^{\beta} \xi_{h1}^{\gamma} + N_{,\beta}^{\alpha} N^{\beta} \xi_{h1}^{\alpha} k_h) \quad (3.7)$$

The expression on the right hand side of (3.7) depends only on the direction  $\xi_{h1}$  and not on the derivative of  $\xi_{h1}$ .

If the hypersurface be one of a family of parallel hypersurfaces, or if the enveloping space be Euclidean,  $N_{,\beta}^{\alpha} N^{\beta}$  is a zero vector and (3.7) then becomes

$$\frac{dk_h}{ds_h} + 2 \sum_l \gamma_{lh} \omega_{lh} = - N_{,\beta\gamma}^{\alpha} \xi_{h1}^{\alpha} \xi_{h1}^{\beta} \xi_{h1}^{\gamma}, \quad (3.8)$$

If the enveloping space be a Euclidean 3-space,  $h, l = 1, 2$ , and (3.8) reduces to

$$\begin{aligned} \frac{dk_1}{ds_1} + 2 \gamma_{211} \omega_{21} &= - N_{,\beta\gamma}^{\alpha} \xi_1^{\alpha} \xi_1^{\beta} \xi_1^{\gamma}, \\ \frac{dk_2}{ds_2} + 2 \gamma_{122} \omega_{12} &= - N_{,\beta\gamma}^{\alpha} \xi_2^{\alpha} \xi_2^{\beta} \xi_2^{\gamma} \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \nabla k_n - 2\tau\gamma &= - \mathbf{a} \cdot \left( \frac{d}{ds} \nabla n \right) \cdot \mathbf{a}, \\ \mathbf{b} \cdot \nabla k'_n - 2\tau\gamma' &= - \mathbf{b} \cdot \left( \frac{d}{ds'} \nabla n \right) \cdot \mathbf{b} \end{aligned} \quad (3.9)$$

and

$$\mathbf{b} \cdot \nabla k'_n - 2\tau\gamma' = - \mathbf{b} \cdot \left( \frac{d}{ds'} \nabla n \right) \cdot \mathbf{b}$$

where  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  are the unit tangents to an orthogonal system on a  $V_n$ ,  $k_n$ ,  $k'_n$  the normal curvatures of  $V_2$  in these directions,  $\gamma, \gamma'$  the geodesic curvatures of the curves having  $\mathbf{a}$  and  $\mathbf{b}$  as unit tangents,  $s, s'$  are their lengths and  $\tau, -\tau$  their geodesic torsions. The expressions on the left hand side in (3.9) are Laguerre's functions for the directions  $\mathbf{a}$  and  $\mathbf{b}$  [2]. (3.7) is therefore a generalisation of Laguerre's functions for a  $V_n$  imbedded in a  $V_{n+1}$ .

Again, from (3.5) we have

$$-\omega_{pq} = N_{,\beta}^{\alpha} \xi_{p1}^{\beta} \xi_{q1\alpha} \quad (3.10)$$

Intrinsic derivative of both sides of (3.10) along the curves  $C_r$  yields,

$$\begin{aligned} -\frac{d\omega_{pq}}{ds_r} &= (N_{,\beta}^{\alpha} \xi_{p1}^{\beta} \xi_{q1\alpha}),_r \xi_{1r}^{\gamma} \\ &= N_{,\beta\gamma}^{\alpha} \xi_{p1}^{\beta} \xi_{q1\alpha} \xi_{r1}^{\gamma} + N_{,\beta}^{\alpha} \xi_{p1}^{\beta} \xi_{q1\alpha},_r \xi_{r1}^{\gamma} \\ &\quad + N_{,\beta}^{\alpha} \xi_{p1,r}^{\beta} \xi_{q1\alpha}^{\gamma}, \\ &= N_{,\beta\gamma}^{\alpha} \xi_{p1}^{\beta} \xi_{q1\alpha} \xi_{r1}^{\gamma} + N_{,\beta}^{\alpha} \xi_{p1}^{\beta} \left[ \sum_t \gamma_{q1r} \xi_{11\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \omega_{qr} N_{\alpha} \right] + N_{,\beta}^{\alpha} \xi_{q1\alpha} \left[ \sum_t \gamma_{p1r} \xi_{11}^{\beta} + \omega_{pr} N^{\beta} \right] \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} -\frac{d\omega_{pq}}{ds_r} &= N_{,\beta\gamma}^{\alpha} \xi_{p1}^{\beta} \xi_{q1\alpha} \xi_{r1}^{\gamma} - \sum_h \omega_{hp} \xi_{h1}^{\alpha} \left\{ \sum_t \gamma_{q1r} \xi_{11\alpha} + \omega_{qr} N^{\alpha} \right\} \\ &\quad + N_{,\beta}^{\alpha} \xi_{q1\alpha} N^{\beta} \omega_{pr} - \sum_h \omega_{hq} \xi_{h1\beta} \sum_t \gamma_{p1r} \xi_{11}^{\beta} \quad (3.11) \end{aligned}$$

Interchanging  $p$  and  $r$  in (3.11) and subtracting from (3.11) we have

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_{pq}}{ds_p} - \frac{d\omega_{pq}}{ds_r} &= (N_{,\beta\gamma}^{\alpha} - N_{,\gamma\beta}^{\alpha}) \xi_{p1}^{\beta} \xi_{q1\alpha} \xi_{r1}^{\gamma} \\ &\quad + \sum_t (\omega_{lr} \gamma_{qip} - \omega_{lp} \gamma_{qir}) \\ &\quad + \sum_t (\omega_{lq} \gamma_{rip} - \omega_{lq} \gamma_{pir}) \\ &= -R_{\delta\beta\gamma}^{\alpha} \xi_{p1}^{\beta} \xi_{q1\alpha} \xi_{r1}^{\gamma} N^{\delta} \\ &\quad + \sum_t (\omega_{lr} \gamma_{qip} - \omega_{lp} \gamma_{qir} + \omega_{lq} \gamma_{rip} - \omega_{lq} \gamma_{pir}) \end{aligned}$$

or

$$\frac{\partial \omega_{rq}}{\partial s_p} - \frac{\partial \omega_{pq}}{\partial s_r} = \bar{R}_{\beta\gamma\delta\varepsilon} N^{\beta\xi_q\gamma\xi_p\delta\xi_r\varepsilon} + \sum_l (\omega_{lr}\gamma_{qlp} - \omega_{lp}\gamma_{qlr} + \omega_{lq}\gamma_{rlp} - \omega_{lq}\gamma_{plr}) \quad (3.12)$$

Equation (3.12) is the Codazzi equation for a  $V_n$  imbedded in a  $V_{n+1}$  in a slightly different way [1].

#### REFERENCES

- [1] EISENHART, L.P. (1949), Riemannian Geometry, University Press, Princeton.
- [2] WEATHERBURN, C. E. (1930), Differential Geometry of Three Dimensions, Vol. 2.
- [3] WEATHERBURN, C. E. (1950), An Introduction to Riemannian Geometry and the Tensor Calculus, pp. 113-153.

Ramjas College,  
University of Delhi,  
India.

## Sur la statistique du vent

PAR

O. GODART

### 1. OBSERVATIONS

La composante horizontale du déplacement moyen de l'air par unité de temps pendant un intervalle donné sera appelé le «vent». L'intervalle considéré dépendra de la méthode de mesure, mais en fait, la valeur obtenue n'est pas sensible à une petite modification de celui-ci. Les mesures sont répétées périodiquement et sont supposées valables pour la moitié de la période avant et la moitié après l'heure officielle de celle-ci. Les données de vent successives en un endroit sont donc censées représenter tous les déplacements de l'air en cet endroit pendant la durée envisagée. La grandeur du vecteur vent est mesurée en nœuds marins, c'est-à-dire, une vitesse telle qu'une minute de méridien est parcourue en une heure. Est aussi déterminé l'angle formé par la direction d'où vient le vent et le nord géographique compté positivement dans le sens des aiguilles d'une montre. Ainsi le vent d'Est aura une direction de 90°.

Les mesures de routine du vent sont effectuées à des niveaux standards : «le vent au sol» est en fait mesuré à 10 mètres au-dessus de celui-ci, les autres niveaux ne sont pas à hauteur fixe, mais à pression atmosphérique constante dont l'altitude varie peu autour des hauteurs dites standards, mentionnées entre parenthèses : ils sont 850 millibars (1.457 m) 700 (3.102 m); 500 (5.574 m); 300 (9.164 m); etc... Inversement le vent au sol peut être considéré au niveau de pression 1000 millibars.

La direction du vent au sol est mesurée par une girouette, sa vitesse par un autre instrument : compteur de tours ou tube de Pitot. On pourra donc supposer les erreurs sur les deux types de données comme indépendantes. Une bonne girouette ne donnera pas d'erreurs systématiques. La mesure de la vitesse pourrait en avoir. En particulier, en-dessous d'une certaine vitesse, l'instrument ne fonctionnera pas, on dira que le vent est calme. En altitude, le vent est déterminé par la dérive d'une cible, le vent calme n'y présentera pas de singularité.

Dans les résumés climatologiques, les vents sont groupés en classes

de vitesse, pour l'altitude de 10 en 10 noeuds, et de direction en secteurs de  $30^\circ$  d'ouverture, le Nord étant au centre du premier secteur, seuls les cas de vents extrêmes sont donnés individuellement.

## 2. LE DIAGRAMME DE POINTS FIGURATIFS

Si, à partir de l'origine et de la direction du Nord dans un plan, on représente les vecteurs vents avec une échelle de longueur proportionnelle à leur vitesse, les points origines de ces vecteurs formeront un diagramme de points.

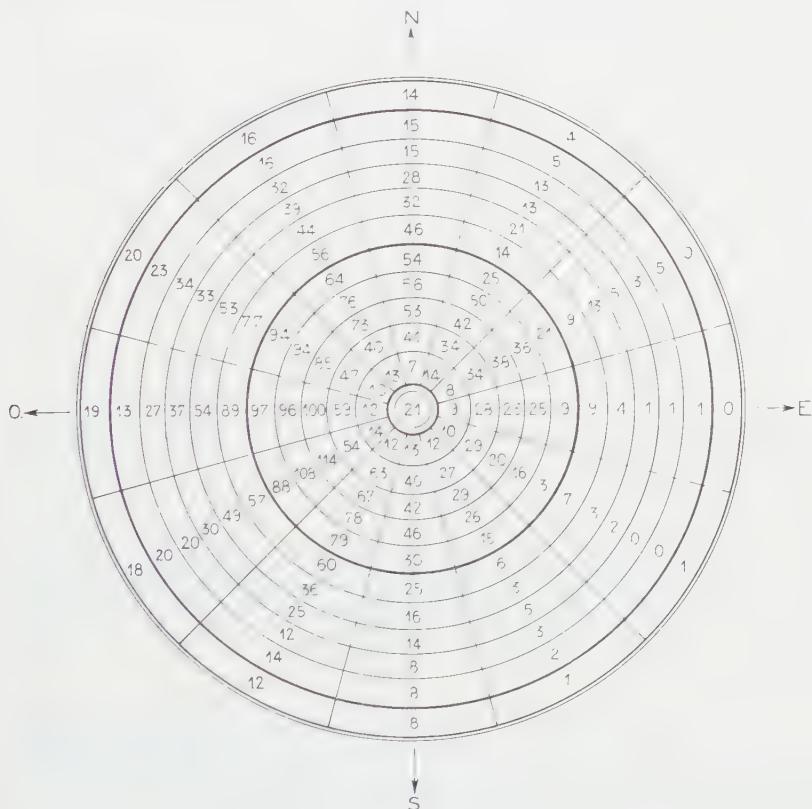


Fig. 1 — Fréquences absolues des vents (300 mb).  
Nombre d'observations : 4041. Direction en secteurs de  $30^\circ$ .  
Echelle des classes de vitesse en 10 noeuds.  
Le nombre des calmes se trouve au centre.

Si la vitesse limite inférieure des classes données est désignée par  $v_i$  la classe  $i$  sera contenue dans l'anneau entre les cercles de rayon  $v_i$

et  $v_{i+1}$ . Les droites d'angle polaire  $\theta = \frac{s\pi}{6} - \frac{\pi}{12}$  et  $\frac{s\pi}{6} + \frac{\pi}{12}$  où  $s$  est un entier de 0 à 11, limiteront les secteurs. La classe  $i$  et le secteur  $s$  définissent une zone et comme le résumé climatologique nous donne le nombre de points figuratifs  $n(v_i, \theta_s)$  tombant dans cette zone. La figure 1 donne un exemple de cette représentation pour les vents de 300 millibars.

Nous supposerons la zone suffisamment petite pour y considérer la densité des points comme constante. La valeur moyenne de la puissance  $r^{\text{ème}}$  de la vitesse dans la zone  $(v_i, \theta_s)$  se calculera donc par :

$$\overline{v^r(v_i, \theta_s)} = \frac{\int_{\theta_s - (\pi/12)}^{\theta_s + (\pi/12)} d\theta \int_{v_i}^{v_{i+1}} v^{r+1} dv}{\int_{\theta_s + (\pi/12)}^{\theta_s + (\pi/12)} d\theta \int_{v_i}^{v_{i+1}} v dv} \quad (1)$$

Les résultats de ce calcul sont indépendants de  $\theta_s$  et s'écrivent pour 1, 2, 3

$$\begin{aligned} \overline{v_i^1} &= \frac{v_i + v_{i+1}}{2} + \frac{1}{6} \frac{(v_{i+1} - v_i)^2}{v_{i+1} + v_i} \\ \overline{v_i^2} &= \frac{v_i^2 + v_{i+1}^2}{2} \\ \overline{v_i^3} &= \frac{v_i^3 + v_{i+1}^3}{2} - \frac{1}{2} (v_i + v_{i+1}) \left( \frac{v_{i+1} - v_i}{2} \right)^2 + \frac{(v_{i+1} - v_i)^4}{40(v_{i+1} + v_i)} \end{aligned}$$

Les sommes des puissances des vitesses par secteurs peuvent donc s'exprimer :

$$\sum v^r(v_i, \theta_s) = n(v_i, \theta_s) \overline{v_i^r} \quad (2)$$

La sommation de tous les secteurs pour une même classe donne :

$$\sum_0^{11} v^r(v_i, \theta_s) = \overline{v_i^r} \sum_{s=0}^{11} n(v_i, \theta_s) \quad (3)$$

Une difficulté se présente cependant pour le vent au sol qui comprend une classe de vents calmes non répartie en secteurs. Pour cette classe en particulier, l'erreur systématique est importante. La formule empirique

$$v = V + \frac{V_0^2}{V + V_0} \quad (4)$$

où  $V_0$  est le seuil de sensibilité de l'anémomètre et  $V$  l'indication de celui-ci, décrit assez bien cette correction pour les petites vitesses.  $V_0$ , de l'ordre de quelques noeuds, est difficile à évaluer expérimentalement,

une estimation de celui-ci peut se faire à partir des données statistiques. Elle consiste à supposer que la densité du diagramme lorsque la vraie échelle est employée varie régulièrement de la classe la plus élevée à la classe 0. La convention météorologique est de prendre pour limite de cette classe la vitesse de 1 nœud indiquée à l'instrument ou en vitesse vraie

$$v_1 = 1 + \frac{V_0^2}{1 + V_0} \cong 1 + V_0$$

Les intervalles des classes 1 et 2 sont égaux, avec  $V_2 = 4$  nœuds. Les densités des 3 premières classes seront donc de l'ordre :

$$\frac{2n_0}{(1 + V_0)^2}, \frac{2n_1}{15} \text{ et } \frac{2n_2}{30}$$

L'intervalle des centroïdes de la classe 2 à la classe 1 étant à peu près le double de celui de la classe 0 à la classe 1; une loi linéaire de variation des densités donne :

$$(1 + V_0)^2 = \frac{60n_0}{6n_1 - n_2} \quad (5)$$

La même loi appliquée aux proportions de cas dans le secteur  $s$  de la classe O donne la formule d'extrapolation :

$$\frac{n_{0s}}{n_0} = \frac{3n_{1s}}{2n_1} - \frac{n_{2s}}{n_2} \quad (6)$$

La distribution des vents «calmes» par secteur permet de calculer les sommes  $S_{rs} = \sum_{i=0} n(v_i, \theta_s) \bar{v}_i^r +$  les puissances des vitesses individuelles des vents hors classe.

Il est clair que les  $S_{rs}$  deviennent de moins en moins précis lorsque  $r$  augmente, étant donné le poids exagéré donné aux vents exceptionnellement forts. La valeur  $r = 3$  est le maximum que l'on puisse envisager.

### 3. DISTRIBUTION THÉORIQUE

Etant donné l'indépendance des erreurs en direction et en force du vent donnons nous la fréquence relative théorique  $\Phi(v, \theta)$  de la statistique en coordonnées polaires, nous écartant ainsi de la procédure cartésienne classique à deux variables. Définissons à partir de celle-ci les fonctions périodiques

$$\nu_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \Phi(v, \theta) v^{r+1} dv \quad (7)$$

Ces fonctions pourront se développer en série de Fourier de période  $2\pi$

$$v_r(\theta) = a_0^{(r)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(r)} \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(r)} \sin n\theta \quad (8)$$

où les coefficients vérifient les relations :

$$\begin{aligned} a_0^{(r)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_r(\theta) d\theta \\ a_n^{(r)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v_r(\theta) \cos n\theta d\theta \quad b_n^{(r)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v_r(\theta) \sin n\theta d\theta \end{aligned} \quad (9)$$

Si  $N$  est le nombre total de mesures de vents on a entre les sommes par secteurs observés et les fonctions théoriques  $v_r(\theta)$  la relation :

$$S_{rs} = \frac{N}{2\pi} \int_{\theta_s - (\pi/12)}^{\theta_s + (\pi/12)} v_r(\theta) d\theta$$

Introduisant les développements en série de Fourier

$$S_{rs} = \frac{N}{12} \left[ a_0^{(r)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(r)} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\frac{n\pi}{12}} \cos n\theta_s + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(r)} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\frac{n\pi}{12}} \sin n\theta_s \right] \quad (10)$$

Si la fonction construite en remplaçant dans les relations précédentes les 12 valeurs  $\theta_s = \frac{s\pi}{6}$  par la variable  $s$  est parfaitement connue, les fonctions théoriques  $v_r(\theta)$  sont automatiquement déterminées. Des valeurs connues de ces fonctions aux 12 secteurs observés, calculons en une approximation entre ces valeurs de  $\theta$  par la formule d'interpolation trigonométrique :

$$S_r(\theta) = A_0^{(r)} + \sum_{n=1}^5 \left[ A_n^{(r)} \cos n\theta + B_n^{(r)} \sin n\theta \right] + A_6^{(r)} \cos 6\theta \quad (11)$$

La solution des 12 équations linéaires  $S_r(\theta_s) = S_{rs}$  donne

$$\begin{aligned} A_0^{(r)} &= \frac{1}{12} \sum_{s=1}^{12} S_{rs} & A_n^{(r)} &= \frac{1}{6} \sum_{s=1}^{12} S_{rs} \cos \frac{n s \pi}{6} \\ A_6^{(r)} &= \frac{1}{12} \sum_{s=1}^{12} S_{rs} \cos s\pi & B_n^{(r)} &= \frac{1}{6} \sum_{s=1}^{12} S_{rs} \sin \frac{n s \pi}{6} \end{aligned} \quad (12)$$

Il est probable que la véritable fonction déduite de  $v_r(\theta)$  aurait contenu dans son développement des harmoniques supérieures à la sixième. Les coefficients (12) ainsi que les conditions sous-jacentes  $A_n^{(r)} = 0$  (pour  $n > 6$ ),  $B_n^{(r)} = 0$  (pour  $n > 5$ ) ne sont qu'une approximation des coefficients de (10), mais on sait que c'est la meilleure que l'on puisse obtenir dans le sens des moindres carrés à partir de 12 données, et que plus l'harmonique est petite, plus précise est la détermination de son coefficient [1]. L'estimation des paramètres théoriques se fera donc en posant :

$$a_0^{(r)} = \frac{A_0^{(r)} 12}{N} \quad a_n^{(r)} = \frac{A_n^{(r)} n\pi}{N \sin \frac{n\pi}{12}} \quad b_n^{(r)} = \frac{B_n^{(r)} n\pi}{N \sin \frac{n\pi}{12}} \quad (13)$$

Si dans l'estimation de  $v_r(\theta)$  à partir des données d'observation, on se limite à la détermination de  $v_r(\theta)$  aux douze points  $\theta_s$ , il est possible d'éviter les intermédiaires des coefficients de Fourier. Comme l'origine des  $\theta$  est quelconque calculons la valeur  $v_r(0)$ , les autres s'obtenant en additionnant  $\theta_s$  aux arguments des formules.

Or,

$$v_r(0) = \sum_n a_n^{(r)} = \frac{12}{N} \sum_{n=0}^6 \frac{A_n^{(r)} \frac{n\pi}{12}}{\sin \frac{n\pi}{12}}$$

Introduisons les expressions des  $A_n^{(r)}$  déduites de (12),  $v_r^{(0)}$  prendra la forme:

$$v_r(0) = \frac{12}{N} \left[ \beta_0 S_r^{(0)} + \sum_{s=1}^5 \beta_s \left( S_r \left( \frac{12-s}{6} \pi \right) + S_r \left( \frac{s\pi}{6} \right) \right) + \beta_6 S_r(\pi) \right] \quad (14)$$

Un calcul algébrique permettra de déterminer les constantes numériques  $\beta_s$ . Une formule de passage dans le sens inverse peut s'établir de la même façon. On l'écrira :

$$S_r(0) = \frac{N}{12} \left[ \gamma_0 v_r(0) + \sum_{s=1}^5 \gamma_s \left( v_r \left( \frac{s\pi}{6} \right) - v_r \left( \frac{12-s}{6} \pi \right) \right) + \gamma_6 v_r(\pi) \right] \quad (15)$$

les formules expriment une correction de groupement polaire.

Les valeurs de  $\beta_s$  et de  $\gamma_s$  sont données dans le tableau 1

$s$	$\beta$	$\gamma$
0	1,169.876	0,871.180
1	-0,110.669	0,077.128
2	0,038.304	-0,018.284
3	-0,020.566	0,008.959
4	0,014.096	-0,005.933
5	-0,011.463	0,004.758
6	0,010.732	-0,004.435

Finalement la détermination de la fonction de fréquence consisterait à résoudre les équations intégrales (7).

#### 4. VÉRIFICATION DE LA LOI CLASSIQUE DE DISTRIBUTION DES VENTS

La loi adoptée dans la pratique météorologique est celle proposée par BROOKS; la fonction de fréquence s'exprime

$$\Phi(v, \theta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}$$

où  $\sigma$  est la constante de dispersion et  $w$  la distance du point figuratif au point résultant dont nous désignerons les coordonnées polaires par  $w_0$  et  $\theta_0$ . Pour un point figuratif quelconque, on a

$$w^2 = v^2 + w_0^2 - 2vw_0 \cos(\theta - \theta_0) \quad (16)$$

Les coordonnées du point résultant sont données par :

$$\begin{aligned} w_0 \cos \theta_0 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty v \cos \theta \Phi(\theta, v) v dv = \int_0^{2\pi} v_1(\theta) \cos \theta d\theta \\ w_0 \sin \theta_0 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty v \sin \theta \Phi(\theta, v) v dv = \int_0^{2\pi} v_1(\theta) \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (17)$$

ou passant aux coefficients de Fourier

$$\begin{aligned} w_0 \cos \theta_0 &= \pi a_1^{(1)} = \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12} \sum_{s=1}^{12} S_{1s} \cos \frac{s\pi}{6} \\ w_0 \sin \theta_0 &= \pi b_1^{(1)} = \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12} \sum_{s=1}^{12} S_{1s} \sin \frac{s\pi}{6} \end{aligned} \quad (18)$$

Quant à la dispersion on a :

$$\sigma^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty w^2 \Phi(\theta, v) v dv$$

d'où remplaçant  $w$  par son expression on obtient :

$$\sigma^2 + w_0^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty v^3 \Phi(\theta, v) v dv = 2\pi a_0^{(2)} = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{12} S_{2s} \quad (19)$$

Pour vérifier la loi classique, calculons la fonction  $v_0(\theta)$  et comparons-la aux valeurs correspondantes observées  $n_0(\theta)$ .

$$v_0(\theta) = \int_0^\infty \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{w^2}{2\sigma^2}} v dv \quad (20)$$

Choisissons comme nouvelle variable d'intégration :

$$x = \frac{v - w_0 \cos(\theta - \theta_0)}{\sigma} \text{ et posant } \xi = \frac{w_0 \cos(\theta - \theta_0)}{\sigma}$$

on peut écrire :

$$w^2 = \sigma^2(x^2 - \xi^2) + w_0^2$$

et l'intégrale

$$v_0(\theta) = \exp\left(\frac{e^{-w_0^2/2\sigma^2}}{2\pi}\right) \left[ 1 + \xi e^{\frac{\xi^2}{2}} \int_{-\xi}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right] \quad (21)$$

Si les deux paramètres  $\theta_0$  et  $\Sigma = \frac{\sigma}{w_0}$  sont donnés; nous pourrons calculer les 12 valeurs de  $\xi_s$ , la quadrature n'est pas connue sous forme finie mais est tabulée [3]. nous obtiendrons donc les 12 valeurs  $v_0\left(\frac{s\pi}{6}\right)$ . A partir de ces valeurs, nous pourrons calculer les sommes espérées par secteur  $S_{0s} = \bar{n}_s$  en utilisant les formules (15).

La comparaison des valeurs théoriques  $n'_s$  aux valeurs observées  $n_s$  peut se faire par un test des  $\chi^2$  en évaluant la quantité  $\chi^2 = \sum_s \frac{(n'_s - n_s)^2}{n_s}$ .

La meilleure estimation de  $\theta_0$  et  $\Sigma$  peut se faire à partir des équations (18) et (19) et donc indépendamment des  $n_s$ . La somme des  $n_s$  et  $n'_s$  étant imposée à N, 11 degrés de liberté doivent être considérés dans l'évaluation de vraisemblance du test  $\chi^2$ .

A partir des observations faites à l'Institut Royal Météorologique, pour les années 1952 à 1959, un tel test a été calculé aux 5 niveaux standards. On a obtenu les résultats suivants :

TABLE I

niveau	N	$\theta_0$	$\Sigma$	$\chi^2$
1000	4502	230° 22'	2.772	980,20
850	4579	254° 17'	1.739	287,19
700	4575	266° 16'	1.566	180,01
500	4475	274° 59'	1.513	116,12
300	4041	282° 07'	1.636	93,29

La table de Fisher donne dans ce cas pour une probabilité de 0,01 % 31,26 nettement inférieur aux valeurs du tableau.

On voit donc que la distribution des vents réels s'écarte de façon appréciable de la distribution idéale classique, et cela d'autant plus que l'on se rapproche du sol.

## 5. LA CORRECTION AGÉOSTROPHIQUE

Le vent géostrophique déterminé par l'exacte balance du gradient de pression et de l'accélération de Coriolis, se rapproche de plus en plus du vent réel au fur et à mesure que l'on monte dans l'atmosphère. On est tenté de supposer que le vent géostrophique obéit à une loi de distribution classique.

Un argument en faveur de cette hypothèse peut s'exposer comme suit : si nous utilisons les coordonnées isobariques, le vent géostrophique dépend uniquement du gradient des hauteurs des surfaces de niveau. Ces composantes  $u_g, v_g$  peuvent s'exprimer :

$$u_g = - \frac{G}{2\omega \sin \varphi} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)_p \quad (22)$$

$$v_g = \frac{G}{2\omega \sin \varphi} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_p$$

où  $G$  est la valeur standard de la gravité,  $\omega$  l'angle de rotation de la terre,  $\varphi$  la latitude,  $h$  la hauteur de la surface isobarique de pression  $p$ . Or cette dernière se distribue vraisemblablement suivant une loi normale de Gauss [4], le vent géostrophique est la limite d'une forme linéaire de deux hauteurs isobariques, c'est-à-dire de quantités à distribution normale ; sa propre distribution sera donc aussi normale.

Quant au vent agéostrophique, différence vectorielle du vent réel et du vent géostrophique, on peut écrire les équations approchées de ces composantes :

$$u_a = \frac{1}{2\omega \sin \varphi} \left[ K \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{dv}{dt} \right] \quad (23)$$

$$v_a = \frac{1}{2\omega \sin \varphi} \left[ \frac{du}{dt} - K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]$$

où  $z$  est la hauteur,  $t$  le temps et  $K$  le coefficient d'échange.

Dans l'atmosphère libre, soit 600 mètres au-dessus du sol, les termes  $K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, K \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$  deviennent généralement très petits. En conséquence, le vent agéostrophique y sera uniquement proportionnel à l'accélération.

Si on ne retient dans l'expression de la dérivée hydrodynamique  $\frac{d}{dt}$  que le terme linéaire, la résultante agéostrophique s'exprime :

$$\bar{u}_a \cong -\frac{1}{N^2 \omega \sin \varphi} \sum \frac{dv}{dt} \cong \frac{1}{N^2 \omega \sin \varphi} \frac{v_f - v_i}{\Delta t}$$

$$v_a \cong \frac{1}{N^2 \omega \sin \varphi} \sum \frac{du}{dt} \cong \frac{1}{N^2 \omega \sin \varphi} \frac{u_f - u_i}{\Delta t}$$

où les indices *f* et *i* signifient respectivement la fin et le début de la période,  $\Delta t$  l'intervalle de temps entre les observations. Comme le vent ne varie que dans d'étroites limites, ces résultantes seront pratiquement nulles si une longue période est envisagée. Etant donné la petitesse du vent agéostrophique dans l'atmosphère libre, on peut calculer l'accélération  $\frac{du}{dt}$  ou  $\frac{dv}{dt}$  à partir de l'approximation géostrophique

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial u_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial u_g}{\partial y}$$

On voit par là que le vent agéostrophique dépend en outre de la variation avec le temps du champ de hauteur ainsi que de sa déformation horizontale.

Donc pour une valeur du vent géostrophique on pourra avoir différentes corrections agéostrophiques suivant les valeurs de ces nouveaux paramètres. Cette correction agéostrophique aura une loi de distribution conditionnelle. Il y aura donc une corrélation entre les paramètres de la distribution agéostrophique et le vent géostrophique qu'il corrige.

Les mêmes conclusions seront valables au sol excepté que le terme en  $K \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  y joue un rôle considérable et que la résultante agéostrophique ne sera donc plus négligeable.

Supposons que la distribution agéostrophique ait la forme classique

$$\frac{1}{2\pi\sigma'^2} e^{-\frac{w'^2}{2\sigma'^2}}$$

où

$$w'^2 = (u_a - u'_0)^2 + (v_a - v'_0)^2$$

La corrélation du vecteur moyen  $u'_0, v'_0$  avec le vent géostrophique originel définira un champ de vecteurs. Faisons en une représentation dans un système d'axes rectangulaires  $u_g - u_0, v_g - v_0$  où  $u_0$  et  $v_0$  sont les composantes de la résultante géostrophique. Nous choisirons en outre des coordonnées non dimensionnelles en prenant comme unité  $w_0$ , ainsi  $u_0$  sera le cosinus de l'angle  $\varepsilon$  formé par la direction du vent

géostrophique résultant avec la direction de l'abscisse, direction que nous définirons plus tard.

Considérant les composantes  $u'_0, v'_0$  comme celles des vitesses d'un fluide à deux dimensions, le mouvement dans le voisinage d'un point du plan  $u_g - u_0, v_g - v_0$  peut se décomposer en une translation et en un mouvement différentiel composé d'une rotation, d'un flux purement convergent et d'une déformation. La translation sera représentée par le vecteur agéostrophique résultant  $(u'_0, v'_0)$  qui est pratiquement nul dans l'atmosphère libre. Nous pouvons supposer la rotation nulle car étant donné la symétrie de la distribution géostrophique autour du vent résultant, celle-ci ne change en rien la distribution marginale du vent réel.

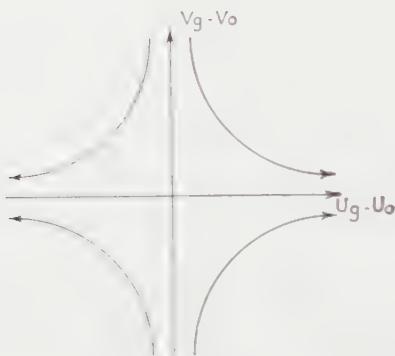


Fig. 2 — Axes de déformation

En outre, en l'absence d'autres méthodes pour calculer la dispersion du vent géostrophique, nous pouvons la supposer inchangée par la correction agéostrophique, c'est-à-dire que la convergence du champ de correction soit nulle. Reste donc la déformation. Orientons les axes  $(u, v)$  suivant les axes de déformation. Nous pouvons écrire :

$$u'_0 - u''_0 = a(u_g - u_0)$$

24)

$$v'_0 - v''_0 = -a(v_g - v_0)$$

où  $a$  est une constante. La figure 2 représente les hyperboles enveloppes des vecteurs de mouvements différentiels.

## 6. LES PARAMÈTRES DU VENT RÉEL

En résumé la fréquence relative des cas où le vent géostrophique se trouve dans l'intervalle  $u_g \pm \frac{du_g}{2}$ ,  $v_g \pm \frac{dv_g}{2}$  et le vent agéostrophique dans l'intervalle  $u_a \pm \frac{du_a}{2}$ ,  $v_a \pm \frac{dv_a}{2}$  est donnée par

$$\frac{1}{4\pi^2\sigma^2\sigma'^2} \exp\left(\frac{-[(\bar{u}_g - u_0)^2 + (\bar{v}_g - v_0)^2]}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{-[(\bar{u}_a - \bar{u}_0)^2 + (\bar{v}_a - \bar{v}_0)^2]}{2\sigma'^2}\right) du_g dv_g du_a dv_a \quad (25)$$

Le vent réel a pour composantes :

$$u = u_g + u_a$$

$$v = v_g + v_a$$

Les axes choisis sont ceux du champ de déformation du vent agéostrophique dans le voisinage du vent géostrophique résultant, la grandeur de ce dernier ayant été choisie comme unité des vitesses.

La répartition du vent réel s'obtient comme la distribution marginale de la distribution à 4 variables précédentes (24) en intégrant dans tout le domaine de variation de  $u_g$  et  $v_g$

$$\Phi(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi^2\sigma^2\sigma'^2} \exp\left(\frac{-[(u_g - u_0)^2 + (v_g - v_0)^2]}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{-[(u - u_g - \bar{u}_0)^2 + (v - v_g - \bar{v}_0)^2]}{2\sigma'^2}\right) du_g dv_g \quad (26)$$

Remplaçant  $u'_0$  et  $v'_0$  par leur approximation linéaire, on voit que la fonction exponentielle est la somme de deux formes quadratiques en  $u_g - u_0$  et  $v_g - v_0$ .

Des carrés parfaits peuvent être construits en introduisant de nouvelles variables d'intégration définies par :

$$U = (u_g - u_0) \sqrt{\frac{1}{\sigma^2} + \frac{(1+a)^2}{\sigma'^2}} - \frac{\sigma}{\sigma'} \frac{(1+a)(u - \bar{u}_0 - \bar{u}'_0)}{\sqrt{\sigma'^2 + (1-a)^2 \sigma^2}} \quad (27)$$

$$V = (v_g - v_0) \sqrt{\frac{1}{\sigma^2} + \frac{(1-a)^2}{\sigma'^2}} - \frac{\sigma}{\sigma'} \frac{(1-a)(v - \bar{v}_0 - \bar{v}'_0)}{\sqrt{\sigma'^2 + (1+a)^2 \sigma^2}}$$

Si nous posons :

$$\sigma_u^2 = \sigma^2(1+a)^2 + \sigma'^2 \quad (28)$$

$$\sigma_v^2 = \sigma^2(1-a)^2 + \sigma'^2$$

on voit que

$$du_g dv_g = \frac{\sigma_u \sigma_v}{\sigma_a \sigma} dU dV$$

et isolant dans (26) les termes en  $U, V$  directement intégrables, on obtient:

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_v} \exp\left(-\frac{[(u - u_0 - u''_0)^2]}{2\sigma_u^2} + \frac{(v - v_0 - v''_0)^2)}{2\sigma_v^2}\right) \quad (29)$$

qui est une loi normale à deux dimensions dont les axes principaux de dispersion de grandeur  $\sigma_u$  et  $\sigma_v$  ont la direction des axes de déformation.

Des relations (28) nous pouvons déduire en résolvant par rapport aux paramètres agéostrophiques

$$a = \frac{\sigma_u - \sigma_v^2}{4\sigma^2} \quad (30) \qquad \sigma'^2 = \frac{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}{2} \qquad \sigma^2 = \frac{(\sigma_u^2 - \sigma_v^2)^2}{16\sigma^2} \quad (31)$$

Les seconds membres contiennent le paramètre inconnu  $\sigma$ ; dispersion géostrophique.

D'après (31)  $\sigma^2 \geq \frac{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}{2}$  c'est-à-dire le carré de la dispersion circulaire désigné par  $\Sigma$  dans le §4. Au fur et à mesure que la déformation agéostrophique diminue,  $a \rightarrow 0$ ;  $\sigma_u \rightarrow \sigma_v$  et le signe égal devient applicable. C'est à 500 millibars que l'approximation géostrophique est la meilleure et c'est à ce niveau que  $\Sigma$  est minimum dans le tableau II. Choisissons  $\sigma$  constant et de valeur  $3/2$ ; légèrement inférieure à ce minimum. Nous avons ainsi supposé la distribution géostrophique normale, circulaire et homothétique.

Quant à la résultante du vent géostrophique, elle est pratiquement identique en altitude à celle du vent réel ( $u''_0, v''_0 = 0$ ). Faisant la moyenne des équations géostrophiques pour tous les temps d'observation, on obtient :

$$u_0 = \frac{-g}{2\omega \sin \varphi} \frac{dh}{dy} \text{ et } v_0 = \frac{g}{2\omega \sin \varphi} \frac{dh}{dx}$$

où  $\bar{h}$  est la hauteur moyenne de la surface isobare du niveau considéré.

La même opération de moyenne effectuée sur l'équation du vent thermique donne :

$$\frac{\partial u_0}{\partial z} = - \frac{R}{2\omega \sin \varphi} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \quad \frac{\partial v_0}{\partial z} = \frac{R}{2\omega \sin \varphi} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \quad (32)$$

où le niveau est défini par la variable  $z = -\log \frac{p}{1000}$

$R$  la constante du gaz atmosphérique et  $\bar{T}$  la température moyenne au niveau  $z$ .

Le gradient thermique moyen dans l'atmosphère libre change très peu avec la hauteur, en accord avec la petitesse des termes de friction dépendant de la dérivée seconde par rapport à  $z$ .

Les données en altitude au-dessus de la Belgique confirment l'approximation de ce gradient comme constant.

Cette propriété peut être utilisée pour déterminer par extrapolation le vent géostrophique moyen à 1000 millibars. De la résultante du vent réel identique à son approximation géostrophique en altitude, il suffit de retrancher le vent thermique multiplié par la valeur de  $z$  du niveau considéré (fig. 3)

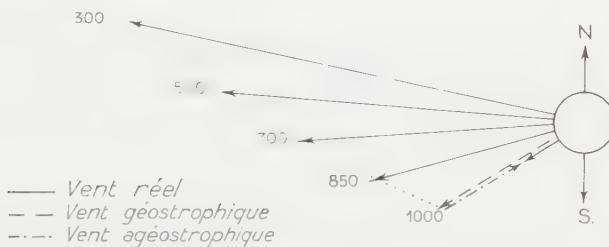


Fig. 3 — Vent moyen à quelques niveaux.

Si  $u_{g0}$   $v_{g0}$  sont ces composantes on a :

$$u_0'' = u_0 - u_{g0} \quad v_0'' = v_0 - v_{g0} \quad (33)$$

On trouve ainsi pour les données du tableau II en nœuds :

$$\begin{aligned} u_0 &= -1.9 & u_{0g} &= -5.9 & \ddot{u}_0 &= 3.9 & \frac{\partial u_0}{\partial z} &= -41.7 \\ v_0 &= -1.6 & v_{0g} &= -3.7 & \ddot{v}_0 &= 2.1 & \frac{\partial v_0}{\partial z} &= +19.9 \end{aligned} \quad (34)$$

Passant à la déformation agéostrophique, l'évaluation des paramètres  $\sigma_u$ ,  $\sigma_v$  peut se faire à partir des moments centrés classiques à deux dimensions définis par :

$$\mu_{ij} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} (v \cos \theta - v_0 \cos \theta_0)^i (v \sin \theta - v_0 \sin \theta_0)^j \Phi(v, \theta) v dv \quad (35)$$

En effectuant les intégrales en  $v$ , nous obtiendrons une forme linéaire des  $v_r(\theta)$  où  $r$  peut prendre les valeurs de  $0$  à  $i + j$  dont les coefficients seront de la forme  $\cos m\theta$  ou  $\sin m\theta$  ( $m$  entier). On voit par là que les  $\mu_{ij}$  s'expriment à partir des coefficients de Fourier des fonctions  $v_r(\theta)$ . Par exemple :

$$\begin{array}{ccccccccc} & b_2^{(2)} & a_1^{(1)} & b_1^{(1)} & & a_0^2 & a_2^2 & [a_1^{-1}]^* \\ \mu_{11} & 4 & & 4 & & 2 & 4 & 4 \\ & & & & & & & \\ & & & & & a_1^2 & a_2^2 & [b_1^{-1}]^2 \\ \mu_{20} & & & & & 2 & 4 & 4 \end{array} \quad (36)$$

Ceux-ci étant reliés aux coefficients  $A_r^n$ ,  $B_r^n$  (voir 13) des sommes Srs déduites des observations, il est très facile de calculer ces moments par l'intermédiaire des résumés polaires.

$\sigma_u, \sigma_v$  demi-longueur des axes principaux de dispersion sont les deux racines de l'équation en  $S$  [4]

$$(S^2)^2 - \left( \frac{\mu_{02} + \mu_{20}}{w_0^2} \right) S^2 + \frac{\mu_{20}\mu_{02} - \mu_{11}^2}{w_0^4} = 0 \quad (37)$$

On peut alors à partir de (30, 31) calculer  $a$  et  $\sigma'$ . L'orientation de l'axe de déformation est donné par  $\tan 2\varepsilon = \frac{\mu_{11}}{\mu_{20} - \mu_{02}}$

TABLE 2

Niveaux	$z$	$a$	$\sigma'$	$\varepsilon$	$\chi^2$
850	0,080	0,210	0,822	58°	22,6
700	0,155	0,121	0,412	55°	25,8
500	0,301	0,075	0,163	35°	31,6
300	0,523	0,096	0,202	15°	27,8

Le résultat du test  $\chi^2$  calculé comme auparavant à partir du nombre de cas dans les douze directions polaires est définitivement meilleur et se situe dans les environs de  $P = 0,01$ ; ce qui étant donné la qualité de l'échantillon considéré est satisfaisant.

Le cas du sol n'a pas été inclus, il est beaucoup moins bon, probablement à cause de la grandeur de la composante agéostrophique et en particulier de l'importance des termes quadratiques dans leur corrélation avec le vent géostrophique.

## 7. LES TERMES D'ORDRE SUPÉRIEUR

Examinons donc l'influence de ces termes; négligeons dans leur expression les termes donnant une convergence résultant de la représentation en mouvement différentiel dans le plan  $u_g - u_0$  et  $v_g - v_0$ .

$$u'_0 = u''_0 + a(u_g - u_0) + b_1[(u_g - u_0)^2 - (v_g - v_0)^2] + c_1(u_g - u_0)(v_g - v_0) \quad (38)$$

$$v'_0 = v''_0 - a(v_g - v_0) + b_2[(v_g - v_0)^2 - (u_g - u_0)^2] + c_2(u_g - u_0)(v_g - v_0)$$

où  $b_1, b_2, c_1, c_2$  sont 4 nouveaux paramètres. Considérons les termes quadratiques comme des variations désignées respectivement par  $\delta u'_0$  et  $\delta v'_0$ .

La distribution conditionnelle

$$\Phi(u_a, v_a | u_g, v_g) = \frac{1}{2\pi\sigma'^2} \exp\left(-\frac{[(u_a - u'_0)^2 + (v_a - v'_0)^2]}{2\sigma'^2}\right)$$

après introduction du vent vrai  $u = u_g + u_a$  et  $v = v_g + v_a$  peut se développer en série :

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\frac{[(u - u_0 - u''_0) - (1-a)(u_g - u_0)]^2 - [(v - v_0 - v''_0) - (1-a)(v_g - v_0)]^2}{2\sigma'^2}\right) \\ & \times \left\{ 1 + \frac{\delta u'_0}{\sigma'} \cdot \frac{(u - u_0 - u''_0) - (1+a)(u_g - u_0)}{\sigma'} + \right. \\ & \quad \left. - \frac{\delta v'_0(v - v_0 - v''_0) - (1-a)(v_g - v_0)}{\sigma'} + \dots \right\} \quad (39) \end{aligned}$$

plus des termes contenant des puissances des vitesses centrées supérieures à 3. Ecrivons pour simplifier les écritures  $u_r = u_0 + u''_0$ ,  $v_r = v_0 + v''_0$  et introduisons les variables auxiliaires U, V définies en (27) on obtient pour  $\delta u'_0$  l'expression :

$$\begin{aligned} & b_1 \left[ \frac{\sigma_u^4}{\sigma_u^4} (u - u_r)^2 (1+a)^2 - \frac{\sigma_v^4}{\sigma_v^4} (v - v_r)^2 (1+a)^2 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2\sigma_u^3\sigma'}{\sigma_u^3} U(u - u_r)(1+a) - \frac{2\sigma_v^3\sigma'}{\sigma_v^3} V(v - v_r)(1-a) \right] \\ & + b_1 \sigma^2 \sigma'^2 \left( \frac{U^2}{\sigma_u^2} - \frac{V^2}{\sigma_v^2} \right) + c_1 \left[ \frac{\sigma_u^2\sigma'^2}{\sigma_u\sigma_v} UV + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\sigma_u^3\sigma'}{\sigma_u\sigma_v} \left( \frac{V(v - v_r)(1-a)}{\sigma_v} + \frac{V(u - u_r)(1+a)}{\sigma_u} \right) \right] \quad (40) \end{aligned}$$

et

$$(u - u_r) - (1 + a)(u_q - u_0) = \frac{(u - u_r)\sigma'^2}{\sigma_u^2} - \frac{\sigma\sigma'(1 + a)U}{\sigma_u}$$

Les termes correspondants en  $\delta v'_0$  s'obtiennent en échangeant les  $u$  en  $v$  et les 1 en 2 et  $+a$  en  $-a$ .

Le facteur multipliant l'exponentielle pourra se mettre sous la forme d'un polynôme du 3ème degré en  $U$  et  $V$ : le passage de la distribution marginale  $\Phi(u, v)$  se fera de même que dans le §6, mais nous aurons en plus à considérer des intégrales supplémentaires de la forme :

$$\int \int e^{-\frac{U^2+V^2}{2}-UV} dU dV$$

où  $i$  et  $j$  peuvent avoir des valeurs de 0 à 3. Lorsque  $i$  ou  $j$  est impair l'intégrale est nulle. Dans les autres cas, elle est égale à 1. On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \Phi(u, v) = & \exp \left( - \left[ \frac{(u - u_r)^2}{2\sigma_u^2} + \frac{(v - v_r)^2}{2\sigma_v^2} \right] \right) \times \\ & \left| 1 + c_1(v - v_r)(1 - a^2) \times \frac{\sigma^4}{\sigma_u^4 \sigma_r^2} + c_2(u - u_r)(1 - a^2) \frac{\sigma^4}{\sigma_u^2 \sigma_v^4} \right. \\ & + b_1 \left[ \frac{\sigma^4}{\sigma_u^6} (u - u_r)^3 (1 + a)^2 + \frac{\sigma^4}{\sigma_u^2 \sigma_v^4} (u - u_r)(v - v_r)^2 (1 + a)^2 - \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\sigma^4}{\sigma_v^4 \sigma_u^2} (u - u_r)(1 - a)^2 \right] \right. \\ & + b_2 \left[ \frac{\sigma^4}{\sigma_v^4} (v - v_r)^3 (1 - a)^2 + \frac{\sigma^4}{\sigma_v^2 \sigma_u^4} (v - v_r)(u - u_r)^2 (1 + a)^2 - \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\sigma^4}{\sigma_u^4 \sigma_v^2} (v - v_r)(1 + a)^2 \right] \right| \end{aligned}$$

$\Phi(u, v)$  a donc la forme d'une exponentielle multipliée par un polynôme du 3ème degré en  $u - u_r$  et  $v - v_r$ . Une telle expression est une généralisation du développement du type de Gram-Charlier.

Considérons en effet une fonction de distribution qui puisse s'exprimer par la série suivante :

$$\begin{aligned} \Phi(u, v) = & \frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_v} \exp \left( - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{u - u_r}{\sigma_u} \right)^2 + \left( \frac{v - v_r}{\sigma_v} \right)^2 \right] \right) \\ & \left[ 1 + \sum_{i,j}' c_{ij} H_i \left( \frac{u - u_r}{\sigma_u} \right) H_j \left( \frac{v - v_r}{\sigma_v} \right) \right] \end{aligned} \quad (42)$$

où le symbole  $\Sigma'$  signifie que  $i$  et  $j$  ont toutes les valeurs entières telles que  $i + j \geq 3$  et les fonctions  $H_i$  et  $H_j$  sont des polynômes d'Hermite de degré  $i$  ou  $j$ . Les constantes  $c_{ij}$  s'exprimeront en fonction linéaire des moments centrés  $\mu_{ij}$  en effectuant de part et d'autre de la relation (42) les intégrales doubles qui les déterminent :

$$\mu_{ij} = \int \int_{\gamma}^{+\infty} (u - u_r)^i (v - v_r)^j d\Phi(u, v) du dv$$

En particulier nous arrêtant au 3ème ordre :

$$\begin{aligned} \Phi(u, v) &= \frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_v} \exp \left( -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{u - u_r}{\sigma_u} \right)^2 + \left( \frac{v - v_r}{\sigma_v} \right)^2 \right] \right) \\ &\left[ 1 - \frac{\mu_{30}}{6\sigma_u^3} H_3 \left( \frac{u - u_r}{\sigma_u} \right) - \frac{\mu_{03}}{6\sigma_v^3} H_3 \left( \frac{v - v_r}{\sigma_v} \right) \right. \\ &- \frac{\mu_{21}}{2\sigma_u^2\sigma_v} H_2 \left( \frac{u - u_r}{\sigma_u} \right) H_1 \left( \frac{v - v_r}{\sigma_v} \right) \\ &\quad \left. + \frac{\mu_{12}}{2\sigma_u\sigma_v^2} H_1 \left( \frac{u - u_r}{\sigma_u} \right) H_2 \left( \frac{v - v_r}{\sigma_v} \right) \right] \end{aligned} \quad (43)$$

où les polynômes  $H$  sont  $H_1(x) = x$ ;  $H_2(x) = x^2 - 1$ ;  $H_3(x) = x^3 - 3x$ . L'identification de (41)-(43) nous permet de déterminer les coefficients de corrélation quadratique  $b_1, b_2, c_1, c_2$  en fonction des moments centrés du 3ème ordre.

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\mu_{30}}{6\sigma^4(1+a)^2} & b_2 &= \frac{\mu_{03}}{6\sigma^4(1-a)^2} \\ c_1 &= \frac{1}{2\sigma^6(1-a^2)} \left[ \mu_{21} - \frac{\mu_{03}}{3} \left( \frac{1+a}{1-a} \right)^2 \right] \\ c_2 &= \frac{1}{2\sigma^4(1-a^2)} \left[ \mu_{12} - \frac{\mu_{30}}{3} \left( \frac{1-a}{1+a} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (44)$$

Les moments du 3ème ordre peuvent être calculés à partir des coefficients de Fourier des  $\gamma_r(\theta)$  et leur évaluation numérique s'obtiendra des sommes  $S_{rs}$ . Pour l'échantillon considéré précédemment, on obtient :

niveaux	$b_1$	$b_2$	$c_1$	$c_2$
850	-0,039	-0,012	0,080	-0,006
700	-0,023	0,014	0,018	0,010
500	-0,034	0,010	0,008	0,014
300	-0,018	0,014	0,015	0,011

On constate la petitesse de ces termes. Pour le cas du sol, les vents agéostrophiques  $\gamma$  jouent un rôle beaucoup plus important et l'introduction des termes quadratiques est nécessaire pour représenter l'échantillon. On peut écrire leur résultante sous la forme :

$$u_r = 3,9 + 0,6(u_g - u_0) - 0,011[(u_g - u_0)^2 - (v_g - v_0)^2] + 0,191(u_g - u_0)(v_g - v_0)$$

$$v_r = 2,1 - 0,6(v_g - v_0) - 0,220[(u_g - u_0)^2 - (v_g - v_0)^2] + 0,628(u_g - u_0)(v_g - v_0)$$

et  $\sigma' = 2,419$

## 8. CONCLUSION

L'approximation géostrophique du vent réel, très bonne en altitude, dépendant uniquement du gradient de la pression doit se distribuer suivant une loi normale classique. La déformation agéostrophique due aux facteurs supplémentaires de l'accélération relative à la terre et des forces de friction est responsable de l'écart de la distribution des vents observés de la loi théorique classique.

En l'absence d'autre indication physique, la loi conditionnelle de cette déformation a été choisie normale; une corrélation linéaire de la résultante agéostrophique avec le vent géostrophique qu'il déforme semble suffire pour expliquer en altitude la distribution des vents réels.

A partir des observations au-dessus de la Belgique, on est amené à construire une image simple de la distribution du vent géostrophique. Celle-ci, en plus de normale circulaire, serait homothétique c'est-à-dire que le rapport de la dispersion à la grandeur du vent résultant reste constant. En plus, la différence vectorielle des vents résultants à différents niveaux aurait une direction constante et une grandeur proportionnelle au  $\log \frac{p_1}{p_2}$  où 1 et 2 s'appliquent aux deux niveaux considérés. Ceci indique une constance du gradient thermique avec l'altitude.

Une telle représentation me paraît assez vraisemblable pour tout endroit ayant un régime climatique simple. Il est possible que pour des régimes climatiques plus complexes, comme celui des moussons, plusieurs de ces distributions s'enchevêtrent.

Dans le cas considéré, cinq quantités suffisent pour déterminer la distribution géostrophique dans toute la troposphère : le vent résultant à un niveau, le gradient thermique et le rapport constant entre la dispersion et la grandeur du vent résultant.

Quant à la déformation agéostrophique, 3 paramètres la définissent à chaque niveau : la grandeur de la déformation résultante  $a$ , la dispersion  $\sigma'$ , toutes deux diminuant lorsque l'on s'approche du niveau quasi géostrophique, et enfin la direction de la déformation  $\epsilon$ .

Remarquons aussi que le rapport  $\sigma'/a$  et la somme des angles de position du vecteur résultant et de l'angle de déformation  $\theta_0 + \epsilon$  paraît-

sent rester entre des limites assez étroites, (2,1 à 3,8) pour le premier, (300 à 320°) pour le second.

Y-a-t-il une signification dynamique cachée derrière ces constatations?

Quant aux vents au sol, la seule corrélation linéaire paraît inadéquate; on remarque cependant qu'un développement potentiel de la résultante agéostrophique en fonction du vent géostrophique correspond à un développement en série de Gram-Charlier qui pourra en tout cas formellement être ajusté à la distribution des vents réels.

Cela ne semble cependant pas apporter d'éclaircissements sur la nature de la correction agéostrophique.

Qu'il me soit permis de remercier ici l'Institut Royal Météorologique et la Régie des Voies Aériennes qui ont mis à ma disposition les données de l'échantillon considéré. Les calculs statistiques ont été effectués par Monsieur POPPE; je tiens aussi à lui exprimer mes remerciements pour l'aide efficace qu'il m'a apportée.

## Le coefficient d'échange de la diffusion atmosphérique

PAR

O. GODART

### 1. DIFFUSION TURBULENTÉ

Considérons dans l'atmosphère une propriété  $E$  qui reste inchangée par son transfert à un niveau différent. La diffusion de cette propriété peut s'exprimer par l'équation :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ K_x \frac{\partial E}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ K_y \frac{\partial E}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K_z \frac{\partial E}{\partial z} \right] \quad (1)$$

où  $x, y, z$  sont les coordonnées d'un système trirectangle; la dérivée totale  $\frac{d}{dt}$  représentant le changement de la quantité  $E$  par unité de masse, en suivant le fluide. En fait, on peut l'expliciter :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial E}{\partial x} + v \frac{\partial E}{\partial y} + w \frac{\partial E}{\partial z}$$

où  $u, v, w$  sont les composantes du vent suivant les trois axes.

Les paramètres  $K_x, K_y, K_z$  sont des coefficients d'échange de nature physique généralement complexe. Dans le cas d'un simple transfert moléculaire, ils seront identiques aux coefficients de conduction. L'atmosphère n'étant pas absolument transparente au rayonnement, principalement à cause de la vapeur d'eau, les coefficients de diffusivité radiative interviendront.

D'autre part, le caractère turbulent de l'atmosphère modifie le champ d'application de l'équation (1). Les quantités qui y interviennent sont en fait des variables aléatoires dont on ne détermine expérimentalement que des valeurs moyennes. Le principe généralement adopté consiste à admettre les mêmes équations pour les valeurs instantanées du flux turbulent que pour le cas du flux laminaire. Le processus de la moyenne effectuée sur l'équation (1) aboutit à la même forme d'équation pour les moyennes de  $E, u, v, w$  mais modifie les paramètres

d'échange en y ajoutant un coefficient de diffusivité turbulente qui, en général, sera la partie prépondérante du coefficient d'échange. Celui-ci dépendra donc d'une façon très complexe des conditions météorologiques générales telles que : stabilité de l'air, convection libre ou forcée, etc...

Les travaux théoriques essayant d'exprimer ces relations à partir de la structure de la turbulence et de la convection n'ont pas encore abouti à une solution entièrement satisfaisante.

Notre but sera plutôt d'exprimer les coefficients d'échange en fonction des caractères macroscopiques mesurables météorologiquement et cela d'une manière semi-empirique à partir des observations, en particulier celles du vent et de la température.

## 2. CAS PARTICULIERS A COEFFICIENT CONSTANT

Nous nous limiterons donc au cas où  $E$  est le vent  $\vec{v}$  ou la forme conservative de la température : la température potentielle  $\Theta$ . D'autre part, nous supposerons une homogénéité dans le plan horizontal de telle sorte que les variations  $x$  et  $y$  n'apparaissent plus explicitement dans l'équation (1).

Le coefficient  $K_z$  n'est pas nécessairement le même pour toute propriété  $E$ ; appelons le  $K_h$  pour la température. On aura donc dans ce cas :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ K_h \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right] \quad (2)$$

Un problème spécifique intéressant est celui de la variation diurne de la température. Au sol, celle-ci varie avec le temps à peu près comme une sinusoïde  $\Theta = \Theta_0 + A \cos \omega t$  l'origine du temps étant choisie au maximum;  $A$  est l'amplitude au sol et  $\omega$  la vitesse angulaire de rotation de la terre :

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7.3 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$$

L'effet diurne disparaît à grande hauteur; ce qui s'exprime par :  $\Theta = \Theta_0$  pour  $z \rightarrow \infty$ .

Si nous prenons comme variable l'amplitude relative complexe  $\theta$  telle que  $\Theta$  soit la partie réelle de  $\Theta_0 + A\theta e^{i\omega t}$ ;  $\theta$  devra satisfaire l'équation différentielle complexe :

$$i\omega\theta = \frac{d}{dz} \left[ K_h \frac{d\theta}{dz} \right] \quad (3)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} \theta &= 1 + 0i \quad \text{pour } z = 0 \\ \theta &= 0 + 0i \quad \text{pour } z = \infty \end{aligned}$$

Dans le cas du vent, on obtient l'équation vectorielle :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mathbf{K}_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right] \quad (4)$$

Excluant les fortes convections organisées, la composante verticale du vent sera en général négligeable. La partie la plus importante de l'accélération est donnée par l'accélération de Coriolis et le gradient de pression s'exprimant vectoriellement par

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = - [2\vec{\omega} \times \vec{v}] - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

où  $p$  est la pression et  $\rho$  la densité.

A grande hauteur, le second membre de (4) est nul, l'expression ainsi définie donne le vent géostrophique  $\vec{G}$  dont les composantes satisfont

$$2\omega \sin \varphi u_g = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$- 2\omega \sin \varphi v_g = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

où  $\varphi$  est la latitude.

Supposons le gradient de pression dans la direction  $y$  et le vent géostrophique constant de grandeur  $G$ , les composantes des équations (2) s'écrivent

$$- 2\omega \sin \varphi v = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mathbf{K}_z \frac{\partial u}{\partial z} \right] \quad (5)$$

$$2\omega \sin \varphi (u - G) = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mathbf{K}_z \frac{\partial v}{\partial z} \right]$$

Considérons les nouvelles variables complexes  $\theta = 1 - \frac{u + iv}{G}$

En additionnant la première équation de (5) multipliée par  $1/G$  à la seconde multipliée par  $i/G$ ; on obtient :

$$2\omega \sin \varphi i \theta = \frac{d}{dz} \left[ \mathbf{K}_z \frac{d\theta}{dz} \right] \quad (6)$$

Comme le vent est nul au sol et géostrophique à grande hauteur, la solution devra satisfaire aux conditions aux limites :  $\theta = 1$  pour  $z = 0$  et  $\theta = 0$  pour  $z = \infty$ .

On voit donc que les deux problèmes sont mathématiquement équivalents. Dans l'hypothèse classique de la constance de  $K_z$ , introduisons

un paramètre  $\mu$  défini par  $\mu^2 = \frac{\omega}{2Kh}$  dans le cas (3), et dans le cas (6)

par  $\mu^2 = \frac{\omega \sin \varphi}{K_z}$

On obtient l'équation unique :  $2i\mu^2\theta = \frac{d^2\theta}{dz^2}$

dont la solution vérifiant les conditions aux limites est :

$$\theta = e^{-\mu(1+i)z} \quad (7)$$

Repassant au problème physique, on voit que l'amplitude d'oscillation diurne diminue exponentiellement avec un déphasage proportionnel à la hauteur; or le déphasage observé est plutôt proportionnel à une puissance de  $z$  inférieure à 1, de l'ordre de 1/5.

Si on représente le vent par un vecteur dans le plan  $(u, v)$ , l'extrémité de celui-ci défini par (7) décrit la spirale classique d'Ekman. Retenons une caractéristique mesurable de cette solution, l'angle formé par la direction du vent tout près du sol avec le vent géostrophique. Théoriquement, il devrait être  $45^\circ$  alors qu'il est observé entre  $10$  et  $35^\circ$ .

Rien que ces deux différences suffisent à mettre en doute la constance du coefficient de mélange.

### 3. MODÈLE THÉORIQUE

Remplaçant les différentielles de (3) et (6) par des différences, on peut à partir des mesures de température ou de vent déterminer des valeurs moyennes de  $K$  dans certaines couches minces; les expérimentateurs ont obtenu ainsi des variations de  $K$  qu'ils ont essayé de représenter par une courbe de la forme  $K = Bz^m$  (8) où  $B$  et  $m$  sont des constantes. Les valeurs trouvées pour  $m$  se situent entre 0 et 2. Pour le même type de diffusion, il semble varier avec les conditions météorologiques.

Il n'est pas certain qu'il soit constant avec la hauteur. Des auteurs différents obtiennent des valeurs différentes de ces paramètres pour les mêmes observations. Ceci montre la nécessité d'un modèle théorique bien précis que l'on comparera directement avec les observations. Des études théoriques basées sur l'expression (8) ont été aussi développées [1].

Une objection peut être faite à un tel modèle. Le flux de la quantité de mouvement peut s'écrire  $K_z \rho \frac{\partial v}{\partial z}$  et de chaleur  $K_h c_p \frac{\partial \Theta}{\partial z}$  où  $c_p$  est la chaleur spécifique à pression constante. Ces deux flux s'annulentraient au sol si  $K_z$  et  $K_h$  y deviennent nuls. Or il y a évidemment échange de chaleur entre le sol et l'atmosphère et absorption de la quantité de mouvement atmosphérique. On a même remarqué au contraire que le flux de chaleur restait pratiquement constant près du sol. Si  $K_0$  est le coefficient de mélange au sol et  $Z$  un facteur d'échelle supposé petit, (de l'ordre du centimètre), il est clair que pour les données expérimen-

tales à quelques décimètres ou mètres l'expression de  $K$  du type :

$$K = K_0 \left(1 + \frac{z}{Z}\right)^m \text{ ne différera pas pratiquement de la formule (8).}$$

De la constance du flux, on tire  $K \frac{d\theta}{dz} = \text{const.}$  d'où  $\theta = \left(1 + \frac{z}{Z}\right)^{1-m}$   
et dans le cas où  $m = 1$ ,  $\theta = 1 + C \log \left(1 + \frac{z}{Z}\right)$ , où  $C$  est une constante.

Cette solution a la particularité d'avoir une phase constante avec la hauteur ou pour le vent une direction constante.

Les profils théoriques trouvés à partir de cette hypothèse sont les mêmes que les profils expérimentaux proposés par Deacon [2], et en particulier, le profil logarithmique représente très bien les variations du vent dans les premiers 40 mètres de l'atmosphère lorsque le gradient vertical de température est adiabatique [1]. Le paramètre  $Z$  déduit des mesures du vent, en lui assignant un profil logarithmique, paraît être proportionnel aux irrégularités du sol. C'est une sorte de coefficient d'aspérité dont la valeur ne dépasse pas quelques centimètres [1] [2].

Nous ne pouvons cependant pas supposer  $K_0 \left(1 + \frac{z}{Z}\right)^m$  valable dans toute l'atmosphère, car les déterminations de  $K$  par différence montrent qu'il atteint une limite finie et que les profils moins près du sol se rapprochent de la spirale d'Ekman caractéristique d'un coefficient d'échange constant. En fait, il faut choisir un  $K$  qui ait les deux valeurs asymptotiques envisagées. Nous pouvons par exemple poser :

$$K = \frac{K_0 \left(1 + \frac{z}{Z}\right)^m}{\left(\frac{1 - K_0}{K}\right) - \frac{K_0}{K} \left(1 - \frac{z}{Z}\right)} \quad (10)$$

où  $K_l$  est la valeur limite de  $K$  lorsque  $z$  tend vers l'infini. Sa valeur dépendra en général de la nature du gaz atmosphérique. Sa valeur théorique n'est pas connue; mais à partir des observations, il semble qu'il soit de l'ordre de  $10^9 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$  et ait à peu près la même valeur pour la quantité de mouvement et la chaleur. Pour la couche près du sol, il est raisonnable de la supposer laminaire et par conséquent  $K_0$  se réduirait au coefficient de la conductivité de la chaleur  $\kappa$  pour la diffusion de la température et au coefficient de viscosité dynamique  $\nu$  pour la quantité de mouvement, dont les valeurs sont données pour les différentes températures :

[1] le lecteur trouvera ces questions classiques exposées dans le livre de Micrometeorology de Sutton McGraw Hill 1953.

[2] voir Priestley. Turbulent Transfer in the Lower Atmosphere p. 25 (1959).

	30°	20°	10°	0°	-10°	-20°
$\mu$	0.23	0.21	0.20	0.19	0.17	0.16
$v$	0.16	0.15	0.14	0.13	0.13	0.11

Il est peut-être possible que la structure du sol modifie des valeurs de  $K_0$ , d'autre part il est certain d'après les mesures de Best [3] que  $K_0$  est inférieur à  $1 \text{ cm}^2/\text{sec}$ , l'écart de la valeur laminaire serait en tout cas minime. Près du sol donc, les coefficients pour la température et le vent sont à peu près égaux. Nous supposerons par la suite,  $\frac{K_l}{K_0}$  une constante, la même dans les deux cas et ayant  $10^6$  pour valeur.

#### 4. LES DEUX SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES

Introduisons l'expression de  $K$  dans l'équation (3) ou (6) et choisissons une nouvelle variable de hauteur

$$x = \sqrt{\frac{\omega \sin \varphi}{K_l}} (Z + z) \quad (11)$$

Dans le cas de la chaleur,  $\sin \varphi = \frac{1}{2}$  et  $K_l$  est la valeur limite pour celle-ci  $\cong 2 \times 10^5$ ; on obtient ainsi :  $\sqrt{\frac{\omega}{2K_l}} \cong 1,35 \times 10^{-5}$

Comme  $Z$  est de l'ordre de quelques centimètres,  $x$  sera proportionnel à la hauteur excepté pour une très petite couche près du sol où  $x = x_0$  sera proportionnel au coefficient d'aspérité  $Z$ .

Le coefficient d'échange pourra s'écrire :

$$K = K_l \frac{x^m}{\mu^m + x^m} \quad \text{où } \mu = Z \sqrt{\frac{\omega}{2K_l}} \left( \frac{K_l}{K_0} - 1 \right)^{1/m}$$

L'équation (2) ou (6) s'écritra :

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{x^m}{\mu^m + x^m} \frac{d\theta}{dx} \right] = 2t\theta \quad (12)$$

Lorsque  $x$  est très grand cette équation coïncide avec celle de la spirale. Considérons l'autre cas, où  $x \ll \mu$  c'est-à-dire

$$z \ll Z \left( \frac{K_l}{K_0} \right)^{1/m} = Z 10^{\frac{6}{m}}$$

Nous pourrons alors négliger le terme en  $x^m$  au dénominateur. Introduisons une nouvelle variable indépendante complexe  $y$

$$y = \frac{2(1+i)}{2-m} x^{1-(m/2)} \mu^{m/2} \quad (13)$$

on obtient :

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \frac{m}{2-m} \frac{1}{y} \frac{d\theta}{dy} - \theta \quad (14)$$

Il suffit de connaître la solution de (14) pour un intervalle limité du paramètre que nous écrirons sous la forme :

$$2n+1 = \frac{m}{2-m} \quad (15)$$

pour la déterminer par différentiation pour d'autres valeurs.

En effet, si  $\theta_1$  est une solution,  $\frac{1}{y} \frac{d\theta_1}{dy}$  est aussi une solution pour  $n$  augmenté de 1.

Ecrivons (14) pour  $\theta_1$ , dérivons les deux membres par rapport à  $y$  et divisons le résultat par  $y$ .

Remarquons que :

$$\frac{1}{y} \frac{d^3\theta}{dy^3} - \frac{d^2}{dy^2} \left[ \frac{1}{y} \frac{d\theta}{dy} \right] + \frac{2}{y} \frac{d}{dy} \left[ \frac{1}{y} \frac{d\theta}{dy} \right]$$

on vérifie finalement :

$$\frac{d^2}{dy^2} \left[ \frac{1}{y} \frac{d\theta_1}{dy} \right] + (2n+3) \frac{1}{y} \frac{d}{dy} \left[ \frac{1}{y} \frac{d\theta_1}{dy} \right] = \frac{1}{y} \frac{d\theta_1}{dy}$$

En particulier pour  $n = -\frac{1}{2}$ ,  $m = 0$  on a pour solution  $e^{-y}$ . C'est la spirale. On peut de là calculer une famille de solutions ayant une expression finie. Si nous mettons en évidence le caractère complexe de  $y$  en posant  $y = Y(1+i)$ , nous pourrons imposer les conditions initiales pour  $Y = Y_0$  correspondant à  $x = x_0$ , la partie réelle de  $\theta$ ,  $\Re(\theta) = 1$  et la partie imaginaire de  $\theta$ ,  $\Im(\theta) = 0$ .

On obtient ainsi pour  $n = \frac{1}{2}$ ,  $m = \frac{4}{3}$ ,  $\theta = \frac{1}{y} \frac{de^{-y}}{dy}$   
d'où on tire :

$$\begin{aligned} \Re(\theta) &= e^{Y_0-Y} \left( \frac{Y_0}{Y} \right) \cos(Y - Y_0) \\ \Im(\theta) &= e^{Y_0-Y} \left( \frac{Y_0}{Y} \right) \sin(Y - Y_0) \end{aligned} \quad (16)$$

pour

$$n = \frac{3}{2}, m = \frac{8}{5} \quad \theta = \frac{1}{y} \frac{d}{dy} \left[ \frac{1}{y} \frac{de^{-y}}{dy} \right] = e^{-y} \left[ \frac{1}{y^3} + \frac{1}{y^2} \right]$$

$$\mathcal{R}(\theta) = e^{Y_0 - Y} \left( \frac{Y_0}{Y} \right)^3 \left[ \frac{(Y - Y_0) \sin(Y - Y_0) \cdot (1 + 2YY_0 + Y + Y_0) \cos(Y - Y_0)}{2Y_0^2 + 2Y_0 + 1} \right]$$

$$\mathcal{J}(\theta) = e^{Y_0 - Y} \left( \frac{Y_0}{Y} \right)^3 \left[ \frac{Y - Y_0 \cos(Y - Y_0) - (1 + 2YY_0 + Y + Y_0) \sin(Y - Y_0)}{2Y_0^2 + 2Y_0 + 1} \right]$$

et ainsi de suite.

Considérons les solutions pour  $-\frac{1}{2} < n < \frac{1}{2}$  ou  $0 < m < \frac{4}{3}$  dont les autres solutions pourront être déduites.

Changeons la variable indépendante de (14) en posant :

$$\theta = y^{-n} W$$

on obtient l'équation :

$$\frac{d^2W}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dW}{dy} - \left( 1 + \frac{n^2}{y^2} \right) W = 0 \quad (18)$$

qui est une équation de Bessel d'ordre  $n$ . Celle-ci admet une solution s'annulant pour les valeurs complexes de  $y$  tendant vers l'infini, donc satisfaisant une des conditions aux limites :

$$W = K_n(y) \quad (19)$$

Remarquant que  $K_{+n} = K_{-n}$ , il nous suffit d'examiner l'intervalle

$$0 \leq n \leq \frac{1}{2}$$

Il existe des développements de  $K_n$  pour des petites valeurs de  $y$  [4]

$$K_n(y) = \frac{\pi}{2} \cos \pi n \left[ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{n+2r}}{r!(-n+r)!} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{n+2r}}{r!(n+r)!} \right] \quad (20)$$

Cette formule n'est naturellement pas valable pour  $n$  entier, mais admet une vraie valeur limite

$$K_0(y) = - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{2r}}{(r!)^2} \left\{ \log \frac{y}{2} + \gamma - \sum_{m=1}^r m^{-1} \right\} \quad (21)$$

tenant compte de  $\frac{y}{2} = \frac{Y(1+i)}{2} = \frac{Y}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4}$  multiplions la fonction  $K_n(y)$

par  $y^{-n}Ae^{i\alpha}$  où  $A$  et  $\alpha$  sont deux constantes choisies de telle façon à satisfaire les conditions aux limites  $\Re_n(Y_0) = 1$  et  $\Im_n(Y_0) = 0$  où  $\Re_n$  et  $\Im_n$  sont écrits respectivement pour les parties réelles et imaginaires la fonction  $K_n(y)$ . Nous obtiendrons ainsi la solution du problème approché satisfaisant toutes les conditions aux limites près du sol. Posons pour abréger

$$P_{+n} = \frac{\Gamma(1-n)}{2^n} \left[ 1 - \frac{Y^4}{2^2 \cdot 2(1+n)(2+n)} + \frac{Y^8}{2^4 \cdot 4!(1+n)(2+n)(3+n)(4+n)} \dots \right]$$

$$P_{-n} = \frac{\Gamma(n)Y^{-2n}}{2^{1-n}} \left[ 1 - \frac{Y^4}{2^2 \cdot 2(1-n)(2-n)} + \dots \right]$$

$$I_{+n} = \frac{\Gamma(1-n)Y^2}{4n(1-n)} \left[ 1 - \frac{Y^4}{2^2 \cdot 3!(2-n)(3-n)} + \frac{Y^8}{2^4 \cdot 5!(2+n)(3-n)(4+n)(5-n)} \dots \right]$$

$$I_{-n} = \frac{\Gamma(n)Y^{-2n+2}}{2^{2-n}(1-n)} \left[ 1 - \frac{Y^4}{2^2 \cdot 3!(2-n)(3-n)} \dots \right]$$

La solution pour  $n$  non entier s'exprime alors :

$$\frac{\Re(\theta)}{A} = \left( -P_n + P_{-n} \cos \frac{n\pi}{2} + I_{-n} \sin \frac{n\pi}{4} \right) \cos \alpha$$

$$+ \left( I_n - I_{-n} \cos \frac{n\pi}{2} + P_{-n} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \sin \alpha$$

$$\frac{\Im(\theta)}{A} = \left( -I_{-n} + I_{-n} \cos \frac{n\pi}{2} - P_{-n} \sin \frac{n\pi}{4} \right) \cos \gamma$$

$$+ \left( -P_n + P_{-n} \cos \frac{n\pi}{2} + I_{-n} \sin \frac{n\pi}{4} \right) \sin \alpha$$

L'évaluation des séries entre parenthèses au sol  $z = 0$  c'est-à-dire

pour  $Y_0 = \frac{Z}{m} \sqrt{\frac{1}{2} \omega \left( \frac{1}{K_0} - \frac{1}{K_1} \right)}$  permet le calcul de  $A$  et  $\alpha$  en imposant  $\Re_0 = A$  et  $\Im_0 = 0$ . En particulier, pour  $Z$  petit,  $\alpha \sim \frac{n\pi}{2} + O(Z^{2n})$

La solution pour  $n = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{R}(\theta)}{A} &= \\ \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \cos \alpha &\left\{ -\frac{Y^{4s}}{2^{2s}(2s!)^2} \left( \log \frac{Y}{\sqrt{2}} + \gamma + \sum_{m=1}^{2s} m^{-1} \right) - \frac{\pi}{4} \frac{Y^{4s+2}}{2^{2s+1}(2s+1)!^2} \right\} \\ -(-1)^s \sin \alpha &\left\{ \frac{Y^{4s+2}}{2^{2s+1}(2s+1)!^2} \left( \log \frac{Y}{\sqrt{2}} + \gamma + \sum_{m=1}^{2s+1} m^{-1} \right) + \frac{\pi}{4} \frac{Y^{4s}}{2^{2s}(2s!)^2} \right\} \\ \frac{\mathfrak{J}(\theta)}{A} &= \\ \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \sin \alpha &\left\{ -\frac{Y^{4s}}{2^{2s}(2s!)^2} \left( \log \frac{Y}{\sqrt{2}} + \gamma + \sum_{m=1}^{2s} m^{-1} \right) - \frac{\pi}{4} \frac{Y^{4s+2}}{2^{2s+2}(2s+2)!^2} \right\} \\ +(-1)^s \cos \alpha &\left\{ \frac{Y^{4s+2}}{2^{2s+1}(2s+1)!^2} \left( \log \frac{Y}{\sqrt{2}} + \gamma + \sum_{m=1}^{2s+1} m^{-1} \right) + \frac{\pi}{4} \frac{Y^{4s}}{2^{2s}(2s!)^2} \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

où la phase  $\alpha$  est donnée approximativement par :  $\tan \alpha = \frac{-\pi/4}{\log \frac{y_0}{\sqrt{2}} + \gamma}$

de la forme  $\frac{-\pi}{4} \log \frac{Z+B}{B}$  -- où  $B$  est la constante numérique

$$\frac{1}{2} \log \left[ \omega \left( \frac{1}{K_0} - \frac{1}{K_l} \right) + Y \right] = -3,38$$

En outre des développements pour  $y$  petit, sont aussi connus des développements asymptotiques pour  $y$  grand dont nous pourrons écrire les parties réelles et imaginaires pour  $n$  entier ou pas.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\theta) &= A \left( \frac{\pi}{2\sqrt{2}Y} \right)^{1/2} e^{-Y} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{[(4n^2-1^2)\dots(4n^2-(2r-1)^2)]}{r! 2^{5r/2} Y^r} \\ &\quad \cos(Y - \alpha + \frac{(2r-1)\pi}{8}) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} Y(\theta) &= A \left( \frac{\pi}{2V_2 Y} \right)^{1/2} e^{-Y} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{[(4n^2-1^2)\dots(4n^2-(2r-1)^2)]}{r! 2^{5r/2} Y^r} \\ &\quad \sin(Y - \alpha + \frac{(2r-1)\pi}{8}) \end{aligned}$$

Ces expressions ne pourront servir qu'à titre indicatif, car pour  $y$  grand l'équation (14) est de moins en moins valable, la solution spirale étant la vraie solution asymptotique.

## 5. CONCLUSION

L'examen de la solution approchée près du sol du paragraphe précédent montre qu'elle n'admet pas d'infini pour  $x = 0$  lorsque  $m < 1$  mais bien un de la forme  $x^{1-m}$  quand  $m > 1$ .

Cependant comme le sol est donné pour  $x = x_0 > 0$  le cas  $m > 1$  ne doit pas nécessairement être écarté, résolvant ainsi la difficulté mentionnée par Sutton (p. 218) entre les données d'observation et la théorie.

D'autre part, les théories de turbulence de Kolmogorov prévoient un exposant de  $4/3$  [5].

La caractéristique de la solution  $m > 1$  sera une diminution de plus en plus rapide avec  $m$  de l'amplitude de  $\theta$  près du sol, diminution trop lente lorsque  $m < 1$  pour expliquer certains profils de température.

Il importe aussi d'examiner la phase :  $\tan \phi = \frac{J(\theta)}{R(\theta)}$ .

Lorsque  $n < \frac{1}{2}$ , elle varie à peu près comme  $Y^{2n}$  près du sol, c'est-à-dire comme  $x^{1-m}$  pour  $m < 1$  ou  $x^{m-1}$  pour  $1 < m < 4/3$ .

Pour  $m = 4/3$  elle varie comme  $Y$  et remarquons que ce sera le cas pour les autres valeurs donnant une solution fine 8 5 etc... ce qui correspond à  $x^{1-m/2}$ .

Si on porte en abscisse le paramètre  $m$  et en ordonnée l'exposant

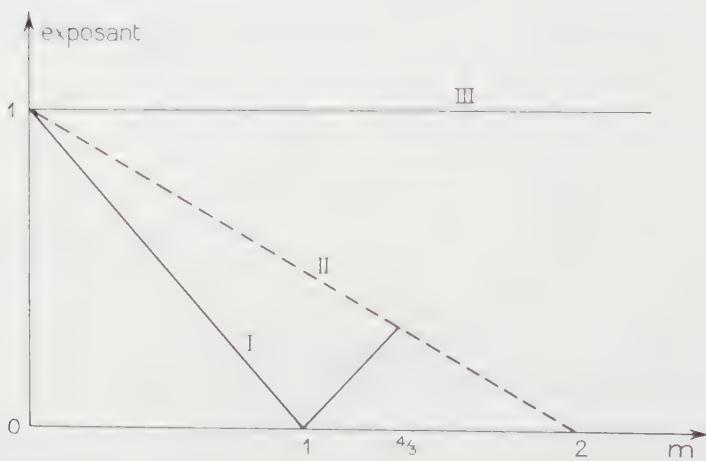


Fig. 1

de  $x$ , donc proportionnel à la hauteur suivant laquelle varie la phase, on obtient la courbe (I) pour la variation de phase près du sol.

Pour la mi-hauteur la phase donnée par le développement asymptotique de Bessel donnera une idée de la solution réelle. Elle est proportionnelle à  $Y$ . A grande hauteur la phase est proportionnelle directement à la hauteur (III).

On voit donc que l'exposant augmente avec la hauteur mais beaucoup plus vite pour  $m < 4/3$ .

D'autre part, l'exposant de phase observé, de  $1/5$  dans la variation diurne, peut s'expliquer par 3 valeurs du paramètre  $m$ :  $m = 4/5, 6/5, 8/5$ .

Pour déterminer à partir des valeurs expérimentales la valeur des deux paramètres théoriques  $Z$  et  $m$ , nous pourrons utiliser des observations faites à plusieurs niveaux, par exemple 30 cm, 150 cm, et 10 m, en extraire pour la température, l'amplitude d'oscillation  $A$  et la phase relative  $\varphi$ ; pour le vent, la force et la direction à partir du nord. Les quantités :  $\log \frac{A_1}{A_2}$ ,  $\varphi_2 - \varphi_1$  peuvent être calculées théoriquement et comparées. Une difficulté du problème expérimental est d'être certain que des phénomènes atmosphériques négligés dans la théorie, tels que modification dynamique de masse d'air, ne soient pas intervenus entre temps.

Auparavant, il faudra effectuer une étude numérique détaillée des équations complètes (12). C'est ce que nous entreprendrons dans une prochaine publication.

#### BIBLIOGRAPHIE

- (<sup>1</sup>) SUTTON : *Micrometeorology*. 1953.
- (<sup>2</sup>) PRIESTLEY : *Turbulent Transfer in the lower Atmospher*. 1959.
- (<sup>3</sup>) BEST GEOPHYSICAL MEMOIRS, 65 (1935) et 85 (1950).
- (<sup>4</sup>) WHITTAKER and WATSON, *Modern analysis*. Ch. XVI. 1940.
- (<sup>5</sup>) International Symposium on atmospheric diffusion (1959) publié dans le volume 6 des *Advances in Geophysics* (Academic Press) en particulier l'article de Taylor de p. 10 à 112.

Deuxième Section  
SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES

Un oculaire compensateur de mesure  
du type Huyghens pour objectifs apochromatiques  
de microscope

PAR

A. BIOT

SOMMAIRE

Si la lentille d'œil est achromatique et si l'on donne au  $\nu$  du verre de champ une valeur convenable on peut réaliser à la fois la compensation pour l'oculaire complet et la suppression de l'aberration chromatique latérale dans l'image qui se fait dans le diaphragme de l'oculaire. On peut alors placer une échelle de mesure dans le plan de ce diaphragme. Un exemple est étudié.

1. *Le problème.* Il est généralement admis que l'on ne peut utiliser commodément une échelle de mesure dans le diaphragme de champ d'un oculaire compensateur, en raison de la présence d'aberration chromatique latérale dans l'image intermédiaire qui se fait dans le plan de ce diaphragme. Nous allons montrer que l'on peut corriger cette aberration par un choix convenable du  $\nu$  du verre de champ et que l'oculaire peut rester compensateur si la lentille d'œil est achromatique. Notre but n'est pas de donner les éléments de construction d'un tel oculaire mais d'en montrer la possibilité.

2. *Notations.* Ce sont celles d'un travail précédent <sup>(1)</sup> légèrement modifiées. Nous appelons  $f_1, f_2$  puis  $v_1, v_2$  les longueurs focales et les constraincences des lentilles d'œil et de champ;  $F$  la longueur focale de l'oculaire complet et  $d$  la distance entre les lentilles supposées minces;  $x_1$  la dernière abscisse focale objet;  $z$  le coefficient de compensation dans l'objet (c'est-à-dire dans l'image donnée par l'objectif);  $\varepsilon_1$  la contribution de la lentille de champ à l'aberration chromatique latérale;  $\varepsilon_2$  celle de la lentille d'œil. Le sens positif est celui de la propagation de la lumière : lentille de champ vers lentille d'œil. Dans les calculs numériques nous prendrons le dm comme unité de longueur.

3. *Détermination de  $f_1, f_2$  et  $d$ .* Pour déterminer ces trois quantités il nous faut trois conditions. Nous choisirons les suivantes : la lentille d'œil (en réalité son point principal objet) se trouve dans le plan d'appui de l'oculaire sur le tube du microscope. On peut admettre que ce plan, par ailleurs, se trouve à 0,12 en arrière de l'image donnée par l'objectif

(1) *Ann. Soc. Sc. Brux.*, 72, 103-106, (1958).

et que cette image se trouve à 1,80 au-delà de la pupille d'entrée P de l'oculaire (pupille de sortie de l'objectif). Appelons encore  $a$  la distance comptée à partir du bord du tube à laquelle se trouve l'image de P donnée par le verre de champ.

Dans ces conditions nous pouvons écrire

$$F = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} \quad (1)$$

$$\frac{1}{d - f_1} - \frac{1}{d - 0,12} = \frac{1}{f_2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{d - a} - \frac{1}{1,80 - d - 0,12} = \frac{1}{f_2} \quad (3)$$

Les relations (2) et (3) expriment la réfraction au verre de champ des rayons centraux venant de l'objet et de P.

De (1) nous tisons

$$\frac{1}{f_2} = \frac{F - f_1}{F(d - f_1)} \quad (4)$$

nous avons ensuite, par (2) et (4)

$$\frac{F - f_1}{F(d - f_1)} = \frac{f_1 - 0,12}{(d - f_1)(d - 0,12)}$$

d'où

$$f_1 = \frac{Fd}{F + d - 0,12} \quad (5)$$

Notons que (2) donne déjà  $f_2$  en fonction de  $d$ . Introduisons (5) dans (4) et égalons les valeurs de  $f_2$  qui résultent de (2) et de (4) transformée. Il vient

$$d^2(F + 1,80 - a) - d[(1,92 - a)F + 0,24a] + 1,92a(F - 0,12) = 0 \quad (6)$$

On peut donc, si l'on se donne F et a, trouver  $d$  puis  $f_1$  et  $f_2$ .

**4. Exemple.** Supposons  $F = 0,40$  ( $G = 6,25x$ ) et  $a = 0,20$ .

Il vient

$$d = 0,4147$$

$$f_1 = 0,2374$$

$$f_2 = 0,4361$$

La distance de P à la lentille de champ vaut 1,5053. Le plan focal objet de l'oculaire se trouve à 0,2947 au-delà du verre de champ et le plan de l'image intermédiaire à 0,1773 au-delà du même verre.

**5. Suppression de l'aberration chromatique latérale  $\epsilon'_1$  dans l'image intermédiaire.** On a <sup>(2)</sup>

$$\epsilon'_1 = \epsilon + \frac{(f_2 + L_2)(f_2 + l_2)}{v_2 f_2 (L_2 - l_2)}$$

<sup>(2)</sup> Ann. Soc. Sc. Brux., 72, 107-112 (1958).

la fraction représentant la contribution du verre de champ. Dans cette fraction  $L_2$  représente la distance de  $P$  au foyer objet du verre de champ et  $l_2$  la distance de l'objet au même foyer. La condition  $\varepsilon'_1 = 0$  donne une équation du premier degré en  $v_2$ .

Dans l'exemple du § 4 on a  $f_2 + L_2 = 1,5053$ ,  $l_2 = 0,7110$  c'est-à-dire  $f_2 + l_2 = -0,2749$  et  $f_2 = 0,4361$ .  $\varepsilon$ , d'autre part, peut être pris égal à  $1/100$ . Il suit

$$v_2 = 52,7$$

Le catalogue de verres de Schott signale un verre SSK6 (un baryum crown très dense) dont le  $\nu$  vaut précisément 52,7 et dont les indices principaux sont

$$n_C = 1,61408; \quad n_d = 1,6176; \quad n_F = 1,62580.$$

*6. L'oculaire compensateur.* On sait que, pour l'oculaire complet, on a

$$\varepsilon' = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$$

Dans l'exemple que nous avons donné on a déjà

$$\varepsilon + \varepsilon_2 = 0$$

Recherchons à quelle condition  $\varepsilon_1 = 0$ .  $\varepsilon_1$  est donné par

$$\varepsilon_1 = \frac{(f_1 + L_1)(f_1 + l_1)}{v_1 f_1 (L_1 - l_1)} = 0$$

les  $L_1$  et  $l_1$  étant définis pour la lentille d'œil comme  $L_2$  et  $l_2$  le sont pour le verre de champ. Comme l'objet coïncide maintenant avec le plan focal objet, on a  $l_1 = 0$  et

$$\varepsilon_1 = (f_1 + L_1)/v_1 L_1$$

avec  $f_1 + L_1 \neq 0$  et  $L_1 \neq \infty$ .  $\varepsilon_1$  ne peut être nul que si  $v_1 = \infty$  c'est-à-dire si la lentille d'œil est achromatique. La condition est suffisante, au moins en lentilles minces.

*7. Vérification.* Reprenons l'exemple traité plus haut (§§ 4 et 5). Faisons comme d'habitude le verre de champ plan convexe. Avec le verre SSK6 cela correspond, pour une longueur focale égale à 0,4361, à un rayon égal à 0,2693. Prenons l'épaisseur égale à 0,035. Le point principal image de la lentille se trouve à  $0,035 n_2 - 0,0216$  en avant de la surface plane de la lentille de sorte que l'image intermédiaire est à  $0,1773 - 0,0216 = 0,1557$  au-delà de cette même surface. La bosse (sommel) de la lentille se trouve à 1,5053 au-delà de  $P$  et  $\varepsilon$  vaut  $-0,01$  c'est-à-dire que si l'on mène de  $P$  un rayon  $C$  faisant avec l'axe un angle de  $2^\circ 30'$  par exemple, le rayon  $F$  correspondant fait avec l'axe un angle

de  $2^{\circ} 31' .5$ . Calculons trigonométriquement la marche de ces rayons à travers le verre de champ puis les hauteurs d'intersection  $h$  dans le plan de l'image intermédiaire. Il vient

$$\begin{aligned} h_C &= 4,683 \text{ mm} \\ h_F &= 4,680 \text{ mm} \end{aligned}$$

$\varepsilon'$ , vaut donc  $-0,003 \cdot 4,680 = -1/1560$ . C'est là une valeur négligeable, mais on peut l'améliorer en changeant le  $v$  choisi.

8. *L'aberration chromatique longitudinale au foyer objet.* La dernière abscisse focale objet  $x_1$  vaut, en lentilles minces,

$$x_1 = -F \left( 1 - \frac{d}{f_1} \right)$$

La variation chromatique est

$$-\left( 1 - \frac{d}{f_1} \right) \delta F - F d \frac{\delta f_1}{f_1}$$

Ici  $\delta f_1 = 0$

$$\delta x_1 = -\left( 1 - \frac{d}{f_1} \right) \delta F$$

Si nous posons  $\Phi = 1/F$ ,  $\varphi_1 = 1/f_1$  et  $\varphi_2 = 1/f_2$  nous avons

$$\Phi = \varphi_1 + \varphi_2 - d\varphi_1\varphi_2$$

$$\delta\Phi = \frac{\varphi_1}{\varphi_1} - \frac{\varphi_2}{\varphi_2} - d\varphi_1\varphi_2 \left( \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} \right)$$

avec  $1/\varphi_1 = 0$ , d'où

$$\delta\Phi = \frac{\varphi_2}{\varphi_2} (1 - d\varphi_1)$$

Les valeurs trouvées pour notre exemple numérique donnent

$$\delta F/F^2 = \delta\Phi = -0,033$$

ou

$$\delta F = 0,0053$$

et

$$\delta x_1 = -3/4 + 0,0053 = -0,0040$$

L'oculaire se comporte donc, en son plan focal objet et sous le rapport considéré, comme une lentille simple de  $v$  égal à 100 ( $F = 40 \text{ mm}$ ). L'effet de l'aberration chromatique longitudinale est négligeable.

9. *Remarques.* a) Les valeurs utilisables de  $v$  sont, pour les verres optiques, comprises entre 30 et 66 environ. Comme, dans des conditions données le produit  $\varepsilon v$  est une constante, on voit que l'on peut corriger un oculaire donné pour une série variée de valeurs de  $\varepsilon$  ( $v_2 = 30$ ,  $\varepsilon = 0,0175$ ;  $v_2 = 66$ ;  $\varepsilon = 0,008$ ).

b) Les calculs qui précèdent (§§ 3 et 4) ne tiennent pas compte de l'épaisseur du verre de champ. Il est facile de la considérer.

## Un oculaire du type Huyghens à lentille de champ achromatisée

PAR

A. BIOT

### SOMMAIRE

Complément au travail précédent. On suppose que le  $v$  de la lentille de champ doit être plus grand que celui ( $v = 66$ ) encore réalisable avec un verre optique. Il faut alors achromatiser plus ou moins cette lentille de champ. On donne un exemple numérique où  $v = \infty$ .

1. *Le problème.* Quand on donne au verre de la lentille de champ d'un oculaire du type Huyghens la plus grande valeur possible de  $v$  réalisable avec un verre optique il se peut que l'on ne puisse corriger l'aberration chromatique latérale de l'image intermédiaire, cette aberration conservant avec l'emploi du verre le meilleur une valeur trop grande pour être tolérable.

Ainsi, dans l'exemple du travail précédent on ne peut corriger que des aberrations  $\varepsilon$  de l'ordre de -0,008 alors que l'on devrait pouvoir arriver à environ -0,001, les valeurs négatives ne se rencontrant que rarement, au moins en microscopie.

Pour résoudre le problème il faut «achromatiser», plus ou moins la lentille de champ de manière à lui donner un  $v$  convenable. Mais une difficulté se présente, due à la grande ouverture relative de cette lentille : les rayons peuvent devenir très courts et l'on est obligé, dans le cas général, de diviser la lentille en deux dont une au moins est «achromatisée». La construction est assez compliquée mais le problème optique posé est résolu et ne peut l'être autrement.

Comme dans le cas précédemment étudié d'ailleurs, la lentille d'œil doit être achromatique.

Notons encore que la simplicité d'un système optique, toujours désirable, n'est plus actuellement un impératif.

Reste à savoir comment répartir la convergence sur les deux parties de la lentille de champ. La solution la plus simple consiste à la répartir également sur les deux composantes, c'est-à-dire à leur donner des lon-

gueurs focales égales. C'est ce que nous ferons. C'est ainsi d'ailleurs que toutes les épaisseurs restent le plus faibles.

*2. Le  $\nu$  d'un groupe de deux lentilles minces très voisines.* Appelons  $\Phi, \varphi_1, \varphi_2$  les inverses des longueurs focales du groupe et de chacune des lentilles et  $d$  leur distance.

Nous avons

$$\Phi = \varphi_1 + \varphi_2 - d\varphi_1\varphi_2$$

et, en différentiant,

$$\delta\Phi = \delta\varphi_1 + \delta\varphi_2 - d(\varphi_1\delta\varphi_2 + \varphi_2\delta\varphi_1)$$

ou

$$\Phi/\nu = \varphi_1/\nu + \varphi_2/\nu - d\varphi_1\varphi_2(1/\nu_1 + 1/\nu_2)$$

a) Si  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ , il vient

$$\Phi = 2\varphi - d\varphi^2$$

$$\Phi/\nu = (1/\nu_1 + 1/\nu_2)(\varphi - d\varphi^2) = (1/\nu_1 + 1/\nu_2)(\Phi - \varphi)$$

Comme  $d$  est petit, on peut prendre  $\Phi = 2\varphi$ , d'où

$$1/\nu = (1/\nu_1 + 1/\nu_2)/2 \quad (1)$$

Si  $\nu_1 = \infty, \nu = 2\nu_2$

Dans les conditions indiquées, si l'une des lentilles est chromatique, le  $\nu$  résultant vaut le double du  $\nu$  de la lentille simple. Dans notre exemple 2 est descendu à  $+0,004$ . C'est encore insuffisant.

b) On peut aussi faire la première lentille hyperchromatique, auquel cas  $\nu_1$  est négatif et  $\nu_2$  est encore augmenté (§ 3).

c) On peut en général prendre deux lentilles semblablement «achromatisées». (§ 3).

*3. Faire une lentille mince de  $\nu$  donné.* Les relations à appliquer sont

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \Phi$$

$$\varphi_1/\nu_1 + \varphi_2/\nu_2 = \Phi/\nu$$

d'où

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \Phi \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu} \frac{\nu}{\nu_2 - \nu_1} \\ \varphi_2 &= \Phi \frac{\nu_2}{\nu} \frac{\nu - \nu_1}{\nu_2 - \nu_1} \end{aligned} \quad (2)$$

*4. Exemple.* Nous désirons établir un oculaire pour lequel  $\nu$  est grand en valeur absolue et ayant les caractéristiques géométriques

$(f_1, f_2, d)$  de celui de l'exemple précédent, c'est-à-dire  $f_1 = 23,74$  mm,  $f_2 = 43,61$  mm,  $d = 41,47$  mm,  $F = 40$  mm. Ici,  $d$  représente la distance entre le point principal image du système de champ et le point principal objet de la lentille d'œil, celle-ci étant un doublet achromatique convenable. Le groupe de champ sera composé de deux doublets achromatiques identiques. Ces deux doublets seront placés convexe recevant la lumière et en contact. Nous prendrons pour chacun de ces doublets les éléments suivants, en mm.

$$\begin{array}{llll} R_1 = & 35,73 & d_1 = 3,72 & n_{2D} = 1,51755 \quad v_1 = 60,2 \\ R_2 = & -35,73 & & \\ R_3 = \infty & & d_2 = 0,99 & n_{1D} = 1,62176 \quad v_2 = 36,1 \\ & & (d_3 = 0,00) & \end{array}$$

Les verres sont le crown de Parra-Mantois B1860 et le flint dense Parra-Mantois C2236.

Le groupe des deux doublets identiques possède une longueur focale égale à 43,61 mm. Le point principal objet de ce groupe se trouve à  $+0,934$  mm de la première surface et le point principal image à  $-5,195$  de la dernière. Il en résulte que la première surface du groupe se trouve à 149,60 mm de la pupille d'entrée et que le plan de l'image intermédiaire est à  $17,73 - 5,195 = 12,53$  mm de la dernière surface du groupe. (Voir le travail précédent).

Menons par le point P un rayon de lumière homogène incliné de  $2^{\circ}30'$  sur l'axe optique et calculons trigonométriquement la marche de ce rayon à travers le groupe de champ avec les indices pour C et pour F ( $n_{1C} = 1,51500$ ;  $n_{2C} = 1,61484$ ;  $n_{1F} = 1,52360$ ;  $n_{2F} = 1,63404$ ).

Recherchons la hauteur d'intersection  $h$  de chacun des rayons sortants avec le plan de l'image intermédiaire. Il vient

$$\begin{aligned} h_C &= 4,727 \\ h_F &= 4,725 \end{aligned}$$

L'aberration chromatique latérale  $\varepsilon$  dans l'image intermédiaire vaut  $-0,002/4.70$ ; elle est donc pratiquement corrigée.

### 5. Remarques.

a) Dans l'oculaire complet ci-dessus calculé, la lentille d'œil se trouve à 3,31 mm au-dessus du plan d'appui de l'oculaire. On peut décider de ne pas en tenir compte ou recalculer  $f_1, f_2, d$  en conséquence.

b) Bien entendu les calculs du genre de ceux qui précédent doivent être complétés par ceux qui sont relatifs aux aberrations que l'on doit normalement considérer dans un oculaire. La nature et la disposition des lentilles de champ peuvent éventuellement intervenir dans la correction de ces aberrations.

## L'aberration chromatique latérale de l'oculaire de Ramsden

PAR

A. BIOT

### SOMMAIRE

L'oculaire de Ramsden possède une aberration chromatique latérale importante dont on calcule la valeur dans le cas classique où les deux lentilles qui le constituent ont la même longueur focale. On montre que cette aberration peut être réduite si l'on reporte la pupille d'entrée de l'oculaire au-delà de ce dernier. Cela peut se réaliser en principe en introduisant une lentille convergente convenable entre l'objectif de l'instrument et l'image donnée par cet objectif.

1. *Oculaire formé d'une seule lentille, la pupille d'entrée étant à l'infini.* Dans ce cas, un rayon homogène venant du centre de la pupille d'entrée, donc parallèle à l'axe, rencontre la lentille à une hauteur  $h$ . Après réfraction, les rayons  $C$  et  $F$  coupent l'axe aux points  $F'_C$  et  $F'_F$  situés à des distances  $OF'_C$  et  $OF'_F$  du centre  $O$  de la lentille supposée mince. Si  $\alpha'_C$  et  $\alpha'_F$  sont les angles d'intersection de ces rayons avec l'axe, on a

$$h = OF'_C \times \alpha'_C = OF'_F \times \alpha'_F$$

Mais

$$OF'_F = OF'_C (1 - 1/v)$$

D'où

$$\alpha'_C = \alpha'_F (1 - 1/v)$$

et

$$\varepsilon = \frac{\alpha'_F - \alpha'_C}{\alpha'_C} = \frac{1}{v} \quad . \quad (1)$$

Le calcul est évidemment valable pour un oculaire formé par une combinaison quelconque de lentilles si l'aberration chromatique aux

points principaux est négligeable et à condition de prendre pour  $v$  la valeur définie par  $F = -F/v$ ,  $F$  étant la longueur focale de la combinaison.

*2. L'oculaire de Ramsden.* Il se compose de deux lentilles simples de longueurs focales  $f_1$  (verre d'œil) et  $f_2$  (verre de champ) séparées par une distance  $d$ . On a :  $d < f_1$  et  $f_2 = mf_1$   $m$  étant compris entre 1 et 1,3. Nous ne considérerons que le cas classique où  $m = 1$ . Nous avons alors  $f_1 = f_2 = f$ . Les constringences des lentilles seront appelées  $v_1$  et  $v_2$ .

Faisons la figure correspondante. Elle est très simple. Sur l'axe optique (nous supposons que les distances sont comptées positivement de gauche à droite) plaçons le foyer objet  $F_2$  du verre de champ. Nous pourrons alors placer successivement, vers la droite, le foyer objet  $F_1$  du verre d'œil, le foyer objet  $F$  de l'oculaire (c'est là que se trouve l'objet examiné par l'oculaire), le centre  $O_2$  du verre de champ, le centre  $O_1$  du verre d'œil, le foyer image  $F'_2$  du verre de champ, le foyer image  $F'_1$  du verre d'œil. Nous placerons encore la pupille d'entrée  $P$  de l'oculaire (par exemple) à gauche de  $F_2$ . L'image  $P'$  de  $P$  à travers l'oculaire se trouvera alors en général entre  $F'_2$  et  $F'_1$ .

Ecrivons

$$\begin{aligned}x_F &= FO_2 = f(f-d)/(2f-d) \\L_2 &= PF_2 \\l_2 &= FF_2 = -f(f-x_F) \\L'_2 &= F'_2 P'_2\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}O_2 O_1 &= F_2 F_1 = d \\F_1 O_2 &= f - d\end{aligned}$$

*3. L'aberration chromatique latérale de l'oculaire.* Si nous la représentons par  $\epsilon'$  <sup>(1)</sup>, nous avons

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$$

$\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  étant les contributions des deux lentilles. En général on a, pour une lentille mince

$$\epsilon = (f + L)(f + l)/vf(L - l)$$

$L$  et  $l$  étant définis comme ci-dessus.

<sup>(1)</sup> *Ann. Soc. Sc. Brux.*, **72**, 107-117 (1958).

Nous avons donc

$$\varepsilon_2 = \frac{(f+L_2)[f-(f-x_F)]}{\nu_2 f(L_2+f-x_F)} = \frac{x_F(L_2+f)}{\nu_2 f(L_2+f-x_F)} = \frac{1}{2\nu_2} \frac{2(f-d)}{2f-d} \frac{L_2+f}{L_2+f-x_F} \quad (2)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{(f_1+L_1)(f_1+l_1)}{\nu_1 f(L_1-l_1)} = \frac{f+L_1}{\nu_1 L_1} - \frac{1}{\nu_1} \left(1 + \frac{f}{L_1}\right) = \frac{1}{\nu_1} \frac{(f-d)L_2+f^2}{(2f-d)L_2+f^2} \quad (3)$$

car, pour  $\varepsilon_1$ ,  $l_1 = 0$  et  $L_1 = -L'_2 = -(2f-d+f^2/L_2)$ , par application de la formule de Newton :  $L_2 L'_2 = f^2$ .

#### 4. Discussion de $\varepsilon'$ .

a) Supposons d'abord que l'on ait pratiquement  $L_2 = \infty$ . Nous avons alors

$$\varepsilon' = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} \right) \frac{2(f-d)}{2f-d} \quad (4)$$

$\varepsilon'$  ne peut être que  $>0$ .

b) Considérons le cas fréquent  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$  et  $d = 0,7f$ . Il vient

$$\varepsilon' = \frac{1}{\nu} \frac{2 \times 0,3}{1,3} = 6,13\nu$$

Si  $\nu = 64$  (borasilicate crown),  $\varepsilon' = +0,0072$ .

L'aberration est considérable; le champ doit rester petit.

c) Si l'on a  $\nu_1 = \nu_2$ ,  $d = 0$ , il vient

$$\varepsilon = 1/\nu$$

Nous retrouvons la relation (1).

5. Discussion de  $\varepsilon'$ . Cas général. Il convient de discuter séparément  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_1$ .

a) On peut écrire

$$\varepsilon_2 = A y_2$$

en posant

$$y_2 = (L_2 + f)/(L_2 + f - x_F) \quad (5)$$

A est indépendant de  $L_2$ .

L'expression (5) représente dans le plan  $(L_2, y_2)$  une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes des coordonnées. Ces asymptotes ont pour équation

$$L_2 = -(f + x_F)$$

$$y_2 = 1$$

Pour  $L_2 = \infty$ ,  $y_2$  est  $>0$ ; pour  $L_2 = 0$ , on a  $y_2 = f/(f - x_F) > 1$ .

Les deux branches de la courbe se trouvent donc dans l'angle supérieur droit et dans l'angle inférieur gauche des asymptotes. Quand  $L_2$  diminue de  $\infty$  jusque 0,  $y_2$  augmente lentement de 1 à  $f/(f - x_F) = (2f - d)/f$ . Il existe une seule valeur de  $L_2$  ( $L_2 = -f$ ) telle que  $y_2 = 0$ .

Mais en pratique elle est inaccessible, car la pupille d'entrée ne peut se trouver dans le verre de champ. (Par ailleurs  $\varepsilon_2$  est nul aussi pour  $f = d$ , ce qui est aussi peu désirable; la meilleure valeur de  $d$  semble, en général, être  $d = 0,7f$ ). Si  $L_2$  est  $< f$ ,  $y_2$  est manifestement  $< 1$ . A gauche de l'axe OY, les valeurs  $y_2$  sont toutes plus petites que celles qui sont à droite, les valeurs  $< 0$  étant inaccessibles.

b) La valeur de  $\varepsilon_1$  peut s'écrire

$$\varepsilon_1 = B y_1$$

avec

$$y_1 = \frac{(f - d)L_2 - f^2}{(2f - d)L_2 + f^2}$$

Cette relation représente également une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes des coordonnées. Ces asymptotes ont pour équation

$$\begin{aligned} L_2 &= -f^2/(2f - d) \\ y_1 &= -(f - d)/(2f - d) < 1 \end{aligned}$$

Pour  $L_2 = \infty$  on a, sur la courbe,  $y_1 = (f - d)/(2f - d)$  et, pour  $L_2 = 0$ ,  $y_1 = 1$ . Les deux branches de la courbe se trouvent, ici aussi, dans les angles supérieur droit et inférieur gauche des asymptotes. Tant que  $L_2 > 0$ ,  $y_1$  est  $> 0$  et l'on a manifestement  $\varepsilon' > 0$ ;  $\varepsilon'$  est d'autant plus grand, sous cette condition, que  $L_2$  est plus voisin de 0.

Revenons à  $y_1$ . On voit facilement que la seconde asymptote pour  $y$  coïncide avec la seconde asymptote pour  $y_2$ . La valeur de  $L_2$  pour laquelle  $y_1 = 0$  correspond à  $L_2 - f^2 / (f - d) = -f \frac{f}{f - d} < -f$ . Cette valeur est également inaccessible. Pour des valeurs plus petites de  $L_2$ , les valeurs de  $y_1$  sont toutefois plus petites que celles qui correspondent à  $L_2 > 0$ .

Si nous réunissons nos conclusions relatives à  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  nous voyons que, pour des valeurs éventuellement accessibles de  $L_2 > 0$ ,  $\varepsilon'$  est plus petit, tout en restant positif, que pour  $L_2 = 0$ , au moins tant que l'on n'a pas  $L_2 = -\infty$ .

**6. Remarque.** La condition  $L_2 < 0$  ne peut en général être réalisée que si l'on intercale une lentille convergente entre l'objectif de l'instrument et l'image qu'il donne. Il semble bien qu'il vaudra mieux, en général, rendre l'oculaire achromatique en le compliquant. De toute manière,  $L_2$  doit être tel que la pupille de sortie se trouve assez loin au-delà de l'oculaire.

L'emploi d'une lentille divergente au lieu de la lentille convergente indiquée ci-dessus pourrait servir, si l'on utilise un oculaire de composition quelconque, à reculer l'emplacement de la pupille de sortie.

## Mesures de corrélation angulaire $\beta$ - $\gamma$ polarisé circulaire sur $\text{Re}^{186}$

PAR

M. DELABAYE(\*), J. DEUTSCH (\*\*), P. LIPNIK (\*\*)  
*Centre de Physique Nucléaire, Université de Louvain, Belgique*

### ABSTRACT

Results of beta-gamma angular correlation polarisation at various values of  $\theta$  on non-unique first forbidden beta transition of  $\text{Re}^{186}$  are given.

Polarisation found furnishes an additional proof that this transition cannot be described by the  $\xi$  approximation.

Measurements of this correlation as a function of the beta energy are now extended.

L'  $\text{Re}^{186}$  se désexcite par émission bêta à l'occurrence de 22% vers le premier niveau excité de l' $\text{Os}^{186}$  dont le temps de vie est de  $8 \cdot 10^{-10}$  sec. Cet état se désexcite alors par rayonnement gamma de 137 Kev vers l'état fondamental de l' $\text{Os}^{186}$  (1).

Les résultats préliminaires de la mesure de corrélation angulaire bêta-gamma polarisé circulaire à un angle moyen  $\theta = 180^\circ$  ont été publiés dans cette revue (2). La présente publication donne les résultats obtenus à d'autres angles.

Un autre type de source a été mis au point : du Re a été évaporé et déposé sous vide sur un support en aluminium de  $2.0 \text{ mgr/cm}^2$ ; le dépôt obtenu est beaucoup plus homogène.

Des mesures complémentaires ont permis de déterminer de manière semi-empirique la valeur de la constante  $K$  d'étalonnage du polarimètre pour le rayon gamma de 137 Kev du  $\text{Re}^{186}$ . Celle-ci permet de fixer la valeur de la polarisation à partir de l'effet mesuré

$$K = 2f \frac{\emptyset_c}{\emptyset_0}$$

$f$  représente le pourcentage des électrons polarisés dans le fer du polari-

(\*) Boursier I.I.S.N.

(\*\*) Chercheur agréé de l'I.I.S.N. — Belgique.

mètre, et  $\frac{v}{c}$  est une valeur moyenne qui tient compte des rayons  $\gamma$  qui ont subi une ou plusieurs diffusions (2) (3).

$$K = (1.00 \pm 0.08) 10^{-2}$$

La valeur moyenne du rapport  $v/c$ , déterminée à partir de l'énergie de coupure introduite par l'absorbeur de 17 mgr cm<sup>-2</sup> (6 mgr d'air et 11 mgr d'aluminium) est

$$\langle \frac{v}{c} \rangle = (0.787 \pm 0.017)$$

Les résultats expérimentaux obtenus aux divers angles sont consignés au tableau 1

TABLEAU 1

Angle $\theta^{\circ}$	Effet expérimental $e(\theta)$
90°	(-0.06 ± 0.44)%
112° 30'	(+0.14 ± 0.26)%
135°	(+0.17 ± 0.28)%
157° 30'	(-0.43 ± 0.24)%
180°	(-0.91 ± 0.28)%

La fonction de distribution à un angle donné  $\theta$  peut s'écrire sous la forme

$$e(\theta) = K \frac{A_1 Q_1 P_1 (\cos \theta) + A_3 Q_3 P_3 (\cos \theta)}{A_0 + A_2 Q_2 P_2 (\cos \theta)}$$

$$= K \omega' \left( \frac{v}{c} \right) \cos \theta$$

avec

$$\omega' = \frac{a_1 Q_1 P_1 + a_3 Q_3 P_3}{1 + a_2 Q_2 P_2} \left( \frac{v}{c} \cos \theta \right)^{-1}$$

Dans cette expression,  $a_2 = (0.081 \pm 0.011)$  (Réf. 4).

Pour approximer au mieux la fonction de distribution, la méthode des moindres carrés de M. E. Rose (5) a été utilisée. La valeur des coefficients  $a_1$  et  $a_3$  est :

$$a_1 = (-0.46 \pm 0.18)$$

$$a_3 = (-0.50 \pm 0.30)$$

Ceci montre que la contribution du terme en  $P_3(\cos \theta)$  pourrait être du même ordre de grandeur que celle du terme en  $P_1(\cos \theta)$ .

En conclusion, la mesure de la corrélation directionnelle bêta-gamma polarisé circulaire sur le  $\text{Re}^{186}$  met en évidence le fait que cette transition une fois interdite non unique ne peut être décrite correctement par la méthode d'approximation  $\xi$ . La mesure de la corrélation directionnelle bêta-gamma polarisé sur le  $\text{Re}^{186}$  en fonction de l'énergie du bêta émis est en cours; elle permettra de déterminer les éléments de matrice responsables de la transition étudiée.

Monsieur le Professeur M. de Hemptinne a bien voulu nous montrer l'intérêt qu'il portait à ce travail. Nous avons largement profité des conseils de Monsieur le Professeur P.C. Macq. Nous tenons à leur exprimer nos plus vifs remerciements.

#### RÉFÉRENCES

- (<sup>1</sup>) Nuclear Data Sheets (National Research Council, Washington D.C.).
- (<sup>2</sup>) DEUTSCH et LIPNIK — *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* — Tome 74 n° III, p. 195-199.
- (<sup>3</sup>) M. DE VROEYE — Mémoire de Licence, Louvain 1961.
- (<sup>4</sup>) PORTER NOVEY — Argonne National Laboratory (1956).
- (<sup>5</sup>) M.E. ROSE — *Phys. Rev.* 92, 610 (1953).

## Spectre de rotation du bromure de vinyle enrichi en Carbone 13

PAR

R.E. GOEDERTIER (\*)

Le but principal de l'étude des spectres de rotation en microondes est de déterminer les moments d'inertie des molécules et de déduire leur structure géométrique des effets de substitutions isotopiques.

Le spectre de rotation de tous les dérivés deutérosubstitués du bromure de vinyle a été étudié par plusieurs auteurs (1-4), portant à 16 le nombre de molécules substituées. Le nombre des constantes connues est donc déjà beaucoup plus élevé que celui des coordonnées des 6 atomes de la molécule. Mais il est bien connu que les erreurs commises en identifiant la configuration de l'état fondamental de vibration des molécules substituées dépassent notablement les erreurs expérimentales des spectres de microondes. Costain (5) a montré que ces erreurs peuvent être réduites d'une manière appréciable par la méthode de calcul proposée par Kraitchman (6) tant que l'atome considéré ne se trouve pas à moins de  $0.15\text{\AA}$  d'un axe d'inertie. Cette méthode déduit les coordonnées d'un atome à partir des moments de deux molécules ne différant que par une substitution de cet atome. Pierce (7) a complété la méthode dans le cas où un atome se trouve proche d'un axe, en faisant appel à des substitutions doubles, portant simultanément sur l'atome considéré et sur un autre, ce qui nécessite donc l'examen de quatre molécules isotopes.

Les isotopes en carbone 13 ont pu être observés dans plusieurs molécules analogues, telles le chlorure de vinyle (8) et le fluorure de vinyle (9). Dans cette dernière molécule la comparaison des isotopes en carbone 13 et de ceux en deutérium a permis récemment de réévaluer la structure de cette molécule (10).

Le fait que les molécules de bromure de vinyle monosubstituées en carbone 13 n'aient pas pu être observées dans leur abondance naturelle (1.1%) peut être expliqué par la plus grande inertie de cette molécule. L'intensité des transitions dépend en effet, par l'intermédiaire de la

(\*) Chercheur agréé de l'I.I.S.N.

Fréquence	Intensité	Molécule	Transition	C. hyperfine	Vibration
14 802.5	1	$\text{C}^{13}\text{H}_2\text{C}^{13}\text{HBr}^{81}$	$1_{11}-2_{12}$	1/2-1/2	
871.1	2		79	1/2-1/2	
875.4	6		81	5/2-7/2	
928.9	1,5			5/2-5/2	
934.5	2		79	1/2-3/2	
936.7	2		81	3/2-3/2	
941.3	1				
958.2	6		79	5/2-7/2	
974.3	5		81	3/2-5/2	
980.8	1.5	13	12	1/2-1/2	
15 022.1	1	13	13	5/2-5/2	
31.8	2,5	13	12	1/2-3/2	
33.6	0.2	(1)	13	13	3/2-3/2
53.2	6	13	12	5/2-7/2	
76.7	3,5	13	13	3/2-5/2	
100.1	0.2	2,5		3/2-3/2	
111.0	1	13	12	1/2-3/2	
114.1	1		81	3/2-3/2	
118.4	1,5				
135.0	6		79	5/2-7/2	
151.6	3,5		81	3/2-5/2	
155.3	1	13	13	5/2-7/2	
169.7	8			5/2-7/2	
175.7	2		79	3/2-3/2	
199.15	1,5	13	12	5/2-5/2	
207.9	1,5			3/2-3/2	
244.5	1	13	13	5/2-7/2	
251.8	3	13	12	3/2-5/2	
259.0	8	13	13	5/2-7/2	
268.1	2		81	5/2-5/2	
276.4	2	13	12	3/2-3/2	
331.6	.6			5/2-7/2	
345.8	5			5/2-7/2	
351.0	1,5	13	12	3/2-3/2	
361.5	1,8	13	13	1/2-1/2	
366.9	1	12	13	1/2-1/2	
376.6	1				
406.4	1	13	13	1/2-3/2	
419.7	1	12	13	1/2-3/2	
423.5	1				
433.9	7	13	12	5/2-7/2	
435.8	5	13	13	5/2-7/2	
440.6	5	12	13	5/2-7/2	
443.6	1	13	12	5/2-5/2	
481.0	2	13	13	5/2-5/2	
490.5	2,5		79	1/2-3/2	
499.7	0.2	1	12	13	1/2-3/2
502.3	2	13	13	3/2-3/2	

Fréquence		Intensité	Molécule	Transition	C. hyperfine	Vibration
15 522.3	0.2	.5				
524.2		10	12	13	79	1 <sub>11</sub> -2 <sub>12</sub>
525.3		10	13	13	79	1 <sub>10</sub> -2 <sub>11</sub>
534.3		4	13	13	81	
536.3		1	13	12	81	
540.1		2.5	12	13	81	1 <sub>11</sub> -2 <sub>12</sub>
551.0		1.5				
565.1		1	12	12	81	
580.0		2	13	13	79	1 <sub>10</sub> -2 <sub>11</sub>
588.3		1	12	13	79	1 <sub>11</sub> -2 <sub>12</sub>
593.1	0.2	.3				
598.2		1.5				
604.9		1.5	13	13	79	1 <sub>10</sub> -2 <sub>11</sub>
609.8		7	13	12	81	
618.2	0.2	.5	12	12	81	1 <sub>11</sub> -2 <sub>12</sub>
620.2	0.2	.3				
631.7	0.2	1				
633.6	0.2	1			79	
638.4		4			81	
643.4		7	[12	13	79	
			[13	13	79	1 <sub>10</sub> -2 <sub>11</sub>
654.8		2	13	12	81	
663.4		3			79	
676.1		2			81	
682.9		2	12	13	81	1 <sub>01</sub> -2 <sub>02</sub>
686.2	0.2	.5				
691.7		1	12	12	81	1 <sub>11</sub> -2 <sub>12</sub>
696.8	0.2	(2)			79	
698.2		5	13	12	79	1 <sub>10</sub> -2 <sub>11</sub>
707.9		2.5			81	
720.8		3.5	12	12	79	1 <sub>11</sub> -2 <sub>12</sub>
737.3		2			81	
753.2		5	12	13	81	1 <sub>01</sub> -2 <sub>02</sub>
759.5		1			79	
777.7		1.6	13	12	79	1 <sub>10</sub> -2 <sub>11</sub>
784.8		.8	12	12	79	1 <sub>11</sub> -2 <sub>12</sub>
794.3		1.6				
815.7		2	13	12	79	1 <sub>10</sub> -2 <sub>11</sub>
827.9		1.2				
839.3		3	12	12	79	1 <sub>11</sub> -2 <sub>12</sub>
843.4		9	12	13	79	1 <sub>01</sub> -2 <sub>02</sub>
852.1		1.8			81	
879.6		2	12	12	81	1 <sub>01</sub> -2 <sub>02</sub>
934.3		1	12	12	81	1 <sub>01</sub> -2 <sub>02</sub>
949.5		9			79	
955.0		2				
962.1		1	12	13	81	1 <sub>10</sub> -2 <sub>11</sub>
978.2		.7				

Fréquence	Intensité	Molécule	Transition	C. hyperfine	Vibration
16 008.7	1.5			1/2-3/2	
23.0	.4			5/2-7/2	
37.5	3			5/2-7/2	exc.
38.7	7	12	12	79	1 <sub>01</sub> -2 <sub>02</sub>
48.1	1			81	5/2-5/2
83.6	1	12	13	81	1 <sub>10</sub> -2 <sub>11</sub>
104.1	2				5/2-5/2
128.1	8			79	3/2-3/2
136.6	4			81	5/2-7/2
156.5	0.2	12	12	79	3/2-5/2
158.6	0.2			81	5/2-5/2
203.8	1	12	12	81	1 <sub>10</sub> -2 <sub>11</sub>
208.3	1.5	12	13	79	1/2-1/2
232.9	9	12	12	81	1/2-3/2
247.0	4	12	13	79	5/2-5/2
278.4	1.5	12	12	81	5/2-5/2
287.6	2			79	3/2-5/2
299.4	0.2			81	1/2-3/2
322.1	7			79	5/2-7/2
331.4	1.5			81	3/2-5/2
376.8	1			79	5/2-5/2
401.8	1				3/2-3/2
440.3	2				3/2-5/2
22 286.9	3	13	13	81	2 <sub>12</sub> -3 <sub>13</sub>
313.4	3				3/2-3/2
326.9	4				7/2-9/2
338.5	36				5/2-5/2
363.0	25				7/2-9/2
364.4					5/2-7/2
406.1	3			79	3/2-5/2
416.4	3			81	5/2-5/2
442.6	1.5			79	7/2-9/2
454.0	4				exc.
468.1	23				5/2-5/2
471.7	3				7/2-9/2
497.0	27				5/2-7/2
498.8	20				5/2-7/2
553.6	3	13	12	81	3/2-5/2
561.0	3	13	13	79	2 <sub>12</sub> -3 <sub>13</sub>
580.6	3	13	12	81	7/2-9/2
593.5	3				exc.
605.45	24				5/2-5/2
629.6	20				7/2-9/2
631.1					5/2-7/2
642.3	3				3/2-5/2
671.5	6			79	1/2-3/2
676.4	2	13	13	81	2 <sub>20</sub> -3 <sub>21</sub>
683.0	3	13	12	81	7/2-7/2
708.8	4	13	12	81	2 <sub>12</sub> -3 <sub>13</sub>
					7/2-9/2

Fréquence	Intensité	Molécule	Transition	C. hyperfine	Vibration
22 719.0	3	13	12    79	$2_{12}-3_{13}$	5/2-5/2
733.4	21				7/2-9/2
741.8	7	13	13    81	$2_{21}-3_{22}$	7/2-9/2
745.7	7			$2_{20}-3_{21}$	7/2-9/2
760.3	2.5			$2_{02}-3_{03}$	7/2-9/2
762.0	13	13	12    79	$2_{12}-3_{13}$	5/2-7/2
764.0	13				3/2-5/2
770.4	8	13	13    81	$2_{21}-3_{22}$	3/2-5/2
774.7	8			$2_{20}-3_{21}$	3/2-5/2
783.1	3			$2_{02}-3_{03}$	3/2-5/2
789.2	2		79	$2_{21}-3_{22}$	1/2-3/2
793.5	2			$2_{20}-3_{21}$	1/2-3/2
826.2	2	13	12    79	$2_{12}-3_{13}$	7/2-7/2
840.3	12	13	13    81	$2_{21}-3_{22}$	5/2-7/2
844.7	12			$2_{20}-3_{21}$	5/2-7/2
872.8	10		79	$2_{21}-3_{22}$	7/2-9/2
877.1	10			$2_{20}-3_{21}$	7/2-9/2
894.8	3	13	13    79	$2_{02}-3_{03}$	7/2-9/2
906.7	6			$2_{21}-3_{22}$	3/2-5/2
911.3	7			$2_{20}-3_{21}$	3/2-5/2
923.4	4			$2_{02}-3_{03}$	3/2-5/2
936.5	3	13	12    81	$2_{21}-3_{22}$	1/2-3/2
990.5	7	13	13    79		5/2-7/2
995.1	7			$2_{20}-3_{21}$	5/2-7/2
23 005.9	9	13	12    81	$2_{21}-3_{22}$	7/2-9/2
9.8	7			$2_{20}-3_{21}$	7/2-9/2
12.2	2	13	13    79	$2_{02}-3_{03}$	7/2-9/2
23.5	6	13	12    81		7/2-9/2
34.1	6			$2_{21}-3_{22}$	3/2-5/2
38.4	5			$2_{20}-3_{21}$	3/2-5/2
47.4	4			$2_{02}-3_{03}$	3/2-5/2
52.2	4		79	$2_{21}-3_{22}$	1/2-3/2
56.3	3			$2_{20}-3_{21}$	1/2-3/2
82.8	0.2	1			
92.2	0.2	1			
103.9		6		81	$2_{21}-3_{22}$
107.9		6			$2_{20}-3_{21}$
113.8	0.2	2			
131.6		5	13    13	81	$2_{11}-3_{12}$
135.1		7	13    12	79	$2_{21}-3_{22}$
139.35		7			$2_{20}-3_{21}$
157.0		1.6			$2_{02}-3_{03}$
159.1		4	13    13	81	$2_{11}-3_{12}$
169.1		6			7/2-9/2
174.5		2	12    13	81	5/2-5/2
177.1		30	13    13	81	$2_{11}-3_{12}$
183.6		2			5/2-7/2
186.0		30	12    13	81	$2_{12}-3_{13}$
					7/2-9/2

exc.

exc.

Fréquence	Intensité	Molécule	Transition	C. hyperfine	Vibration
23 187.5	0.3				
198.2	0.3				
201.6	36	13	13	81	2 <sub>11</sub> -3 <sub>12</sub>
210.6	27	12	13	81	2 <sub>12</sub> -3 <sub>13</sub>
212.1	(27)				
235.7	0.2	2	13	12	79
247.3	4				2 <sub>21</sub> -3 <sub>22</sub>
252.2	6				2 <sub>20</sub> -3 <sub>21</sub>
254.8	1				
256.4	1	12	13	79	2 <sub>12</sub> -3 <sub>13</sub>
261.8	5	13	13	79	2 <sub>11</sub> -3 <sub>12</sub>
264.0	4	12	13	81	2 <sub>12</sub> -3 <sub>13</sub>
274.0	.5	13	12	79	2 <sub>01</sub> -3 <sub>02</sub>
289.2	5				
298.5	5	13	13	79	2 <sub>11</sub> -3 <sub>12</sub>
302.9	3	12	13	79	2 <sub>12</sub> -3 <sub>13</sub>
307.2	6	13	13	79	2 <sub>11</sub> -3 <sub>12</sub>
316.6	40				
		12	13	79	2 <sub>12</sub> -3 <sub>13</sub>
327.6	2.5	13	13	79	2 <sub>11</sub> -3 <sub>12</sub>
345.6	40				
		12	13	79	2 <sub>12</sub> -3 <sub>13</sub>
347.8	0.3				
374.7	0.2	1	13	12	81
382.6	0.2	.5	13	13	79
393.4	3	13	12	81	
400.4	0.2	6	13	13	79
410.1	3	12	13	79	2 <sub>12</sub> -3 <sub>13</sub>
420.7	4.5	13	12	81	2 <sub>11</sub> -3 <sub>12</sub>
426.7	0.2	1			
430.8	4.5	12	12	81	2 <sub>12</sub> -3 <sub>13</sub>
438.4	33	13	12	81	2 <sub>11</sub> -3 <sub>12</sub>
455.5		12	12	81	2 <sub>12</sub> -3 <sub>13</sub>
462.6	33	13	12	81	2 <sub>11</sub> -3 <sub>12</sub>
470.9	4	12	12	81	2 <sub>12</sub> -3 <sub>13</sub>
482.6	20				
507.0	15				
508.5	0.2				
546.5	2	12	13	81	2 <sub>21</sub> -3 <sub>22</sub>
549.8	0.2	.5	12	12	79
558.9	3	12	13	81	2 <sub>02</sub> -3 <sub>03</sub>
560.3	3	12	12	81	2 <sub>12</sub> -3 <sub>13</sub>
566.7	2.5	13	12	79	2 <sub>11</sub> -3 <sub>12</sub>
576.1	22				
585.4	1	12	12	79	2 <sub>12</sub> -3 <sub>13</sub>
587.1	2	12	13	81	2 <sub>02</sub> -3 <sub>03</sub>
604.9	25	13	12	79	2 <sub>11</sub> -3 <sub>12</sub>
611.6	12	12	12	79	2 <sub>12</sub> -3 <sub>13</sub>
617.0	6	12	13	81	2 <sub>21</sub> -3 <sub>22</sub>

Fréquence		Intensité	Molécule	Transition	C. hyperfine	Vibration
23 622.1		7		2 <sub>20</sub> -3 <sub>21</sub>	7/2-9/2	
634.0		1.5		2 <sub>02</sub> -3 <sub>03</sub>	7/2-9/2	
640.7		6	12	79	2 <sub>12</sub> -3 <sub>13</sub>	5/2-7/2
642.5			12	79	2 <sub>12</sub> -3 <sub>13</sub>	3/2-5/2
650.7		7	12	81	2 <sub>20</sub> -3 <sub>21</sub>	3/2-5/2
658.3		6	13	79	2 <sub>11</sub> -3 <sub>12</sub>	7/2-7/2
698.3	0.2	3				
704.9		1	12	12	79	7/2-7/2
716.1		8	12	13	81	5/2-7/2
721.3		8			2 <sub>20</sub> -3 <sub>21</sub>	5/2-7/2
749.5		8		79	2 <sub>21</sub> -3 <sub>22</sub>	7/2-9/2
754.6		15			2 <sub>20</sub> -3 <sub>21</sub>	7/2-9/2
770.8		(3)			2 <sub>02</sub> -3 <sub>03</sub>	7/2-9/2
788.9		3			2 <sub>20</sub> -3 <sub>21</sub>	3/2-5/2
799.7	0.2	2			2 <sub>02</sub> -3 <sub>02</sub>	3/2-5/2
841.6	0.2	4	12	12	81	2 <sub>21</sub> -3 <sub>22</sub>
868.0		14	12	13	79	5/2-7/2
873.3		16			2 <sub>20</sub> -3 <sub>21</sub>	5/2-7/2
911.6		16	12	12	81	2 <sub>21</sub> -3 <sub>22</sub>
916.4		7.5			2 <sub>20</sub> -3 <sub>21</sub>	7/2-9/2
940.2		8			2 <sub>21</sub> -3 <sub>22</sub>	3/2-5/2
945.0		8			2 <sub>20</sub> -3 <sub>21</sub>	3/2-5/2
952.7		2			2 <sub>02</sub> -3 <sub>03</sub>	3/2-5/2
24 010.3		5.5			2 <sub>21</sub> -3 <sub>22</sub>	5/2-7/2
15.3		10			2 <sub>20</sub> -3 <sub>21</sub>	5/2-7/2
42.5		3		79	2 <sub>21</sub> -3 <sub>22</sub>	7/2-9/2
47.5		7			2 <sub>20</sub> -3 <sub>21</sub>	7/2-9/2
60.5		3	12	13	81	2 <sub>11</sub> -3 <sub>12</sub>
63.7		2	12	12	79	2 <sub>02</sub> -3 <sub>03</sub>
71.9		2	12	13	81	2 <sub>11</sub> -3 <sub>12</sub>
76.7		1	12	12	79	2 <sub>21</sub> -3 <sub>22</sub>
080.2		13	12	13	81	2 <sub>11</sub> -3 <sub>13</sub>
85.5		1				5/2-7/2
92.5		2	12	12	79	2 <sub>02</sub> -3 <sub>03</sub>
102.5	0.5		12	13	81	2 <sub>11</sub> -3 <sub>12</sub>
104.5		33				5/2-7/2
127.0	0.2	1				7/2-7/2
150.9		4				7/2-7/2
160.8	0.2	2.5	12	12	79	2 <sub>21</sub> -3 <sub>22</sub>
165.6		4			2 <sub>20</sub> -3 <sub>21</sub>	5/2-7/2
181.5	0.2	1.5			2 <sub>02</sub> -3 <sub>03</sub>	7/2-7/2
201.6		2.5	12	13	79	2 <sub>11</sub> -3 <sub>12</sub>
211.3		3.5				5/2-5/2
221.0		18				7/2-9/2
230.8		2.5				5/2-7/2
250.4		30				5/2-7/2
289.2	0.2	.5				7/2-7/2
305.7		3				7/2-7/2

Fréquence	Intensité	Molécule	Transition	C. hyperfine	Vibration
24 327.2	3	12	12	81	
353.5	3			3/2-3/2	
365.1	1.5			7/2-9/2	exc.
373.0	25			5/2-5/2	
377.9	2.5			7/2-9/2	
397.3	22			5/2-7/2	exc.
423.4	4			5/2-7/2	
442.9	3 [ .6 ]			7/2-7/2	
457.1	5 [ 2 ]		79	3/2-3/2	
472.7	.1 [ .2 ]				
492.4	1 [ 2 ]			7/2-9/2	exc.
500.0	0.3	.5 [ .6 ]			
502.4	3 [ 1 ]			5/2-5/2	
512.0	27 [ 7 ]			7/2-9/2	
521.6	1.3 [ 1.2 ]			5/2-7/2	exc.
528.6	.7 [ .8 ]				
533.1	[ .8 ]				
541.1	26 [ 8 ]			5/2-7/2	
595.7	2.5 [ 1 ]			7/2-7/2	

Les intensités entre [ ] ont été observées à titre d'exemple à la température ambiante ( $20^\circ$ ), les autres à la température de  $-80^\circ$ . Seules les raies du premier état vibrationnel excité ont été attribuées.

fonction de partition, de l'énergie des niveaux et donc des constantes rotationnelles. Le coefficient d'absorption maximum peut approximativement être considéré (11) comme proportionnel à  $\sqrt{ABC}$ .

Si on compare les valeurs de ce terme pour différentes molécules, ainsi que leur abondance naturelle :

$$\begin{array}{lll} \text{CH}_2\text{CHF}^{19} & \sqrt{ABC} = 2.49 \cdot 10^6 \text{ Mc}^{3/2} & (100\%) \\ \text{CH}_2\text{CHCl}^{35} & 1.36 & (75\%) \\ \text{CH}_2\text{CHBr}^{79} & 0.93 & (50\%) \end{array}$$

on peut prévoir la faible intensité du bromure de vinyle.

Il nous a paru nécessaire d'utiliser un échantillon enrichi en carbone 13. Celui-ci est disponible sous la forme de carbonate de baryum enrichi à 60%. Le carbonate est réduit en carbure au moyen du magnésium, et le bromure de vinyle peut être préparé par photosynthèse à partir de l'acétylène. On obtient alors un mélange de huit espèces isotopiques, soit 36% de vinyle lourd, 16% de vinyle léger et 24% de chaque forme intermédiaire, chacun de ces radicaux pouvant encore accepter les deux isotopes naturels du brome.

Afin d'augmenter les intensités spectrales, le spectre a été observé entièrement à la température de la carboglace. Simultanément la largeur des raies était réduite, et les transitions de l'état fondamental étaient

renforcées d'un facteur 2.5 par rapport à celles du premier état excité de vibration, dont certaines raies étaient encore clairement visibles. Il s'agit de la vibration  $v_{10}$  de la notation de Charette (12), c'est-à-dire du balancement de la liaison CBr.

Le spectre contient les transitions de  $J = 1$  à  $J = 2$  et de  $J = 2$  à  $J = 3$ ; elles sont toutes du type  ${}^aR_{0,1}$ , soit  $\Delta J = \Delta K_1 = 1$  et  $\Delta K_{-1} = 0$ .

L'incertitude sur la fréquence est de 0.1 Mc sauf indication contraire. Le spectre était observé à une pression du gaz de 0.03 mm Hg et avec un champ Stark de 400 v/cm. Les intensités ne peuvent être précisées à moins de 30% et n'ont qu'une valeur relative; le bruit de fond atteignait 0.4 v avec une constante de temps de 0.035 sec au détecteur de phase. D'autre part les intensités des transitions  $2_{02} - 3_{03}$  sont systématiquement diminuées par le faible effet Stark qu'elles subissent et qui les rend dépendantes de l'intensité du champ.

Ces résultats constituent la dernière phase expérimentale de l'étude de la structure du bromure de vinyle à partir de son spectre de rotation. Nous tenons à remercier ici Mr le Professeur M. de Hemptinne qui assura depuis le début la direction des recherches relatives à cette molécule. Nous remercions également Mme M. Germain-Lefèvre pour les soins apportés à la délicate préparation de l'échantillon. Notre reconnaissance s'adresse également au Centre National de Chimie Physique Moléculaire dont l'aide financière a contribué à nos travaux.

*Laboratoire de Physique Moléculaire et Nucléaire*  
UNIVERSITÉ DE LOUVAIN

BIBLIOGRAPHIE

- (1) C.D. CORNWELL — *J. Chem. Phys.* **18**, 1118 (1950).
- (2) P.V. GOEDERTIER et K.L. LEE — *Ann. Soc. Sc. Bruxelles* **71**, 184 (1957).
- (3) R.E. GOEDERTIER — *Bull. Acad. Roy. Belgique* **46**, 767 (1960).
- (4) S. DE HEPCE — Communication ci-après, p. 194.
- (5) C.C. COSTAIN — *J. Chem. Phys.* **29**, 864 (1958).
- (6) J. KRAITCHMAN — *Am. Journ. Physics* **21**, 17 (1953).
- (7) L. PIERCE — *J. Mol. Spect.* **3**, 575 (1959).
- (8) D. KIVELSON, E. BRIGHT WILSON and D.R. LIDE JR.—*J. Chem. Phys.* **32**, 205 (1960).
- (9) H.W. MORGAN and J.H. GOLDSTEIN — *J. Chem. Phys.* **30**, 1025 (1959).
- (10) D.R. LIDE JR. and D. CHRISTENSEN — Vth European Congress on Molecular Spectroscopy, Amsterdam 1961, Paper 42.
- (11) C.H. TOWNES and A.L. SCHAWLOW — *Microwave Spectroscopy*. McGraw-Hill, N.Y. 1955.
- (12) J. CHARETTE et M. DE HEMPTINNE — *Bull. Acad. Roy. Belgique* **38**, 934 (1952).

## Remarques sur les spectres infrarouges des bromures de vinyle deutérosubstitués

PAR

C. P. COURTOY

*Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur (Belgique)*

### RÉSUMÉ

La structure d'un certain nombre de bandes perpendiculaires des bromures de vinyle deutérosubstitués a été obtenue entre 750 et 1100 cm<sup>-1</sup>. Il s'agit des molécules CH<sub>2</sub> = CDBr, CD<sub>2</sub> = CHBr, CD<sub>2</sub> = CDBr, et CHD = CHBr cis et trans. Certains résultats ont pu être obtenus concernant les constantes de rotation.

Plusieurs recherches ont été effectuées précédemment ou sont encore en cours en vue de déterminer la structure et les constantes moléculaires de la famille isotopique des bromures de vinyle H<sub>2</sub>C = CHBr partiellement ou complètement deutérés. Elles utilisent les spectres Raman (1), les spectres infrarouges à faible dispersion (2) ou les spectres de microondes (3).

Une étude théorique de la fonction potentielle pour les vibrations gauches des formes ordinaires et deutérées a été publiée par Manneback et Rahman (4).

Il a semblé que des spectres infrarouges à plus grande dispersion pourraient ajouter de nouveaux renseignements à l'étude de cette question. Les spectres d'un certain nombre de bandes ont été obtenus grâce au spectromètre infrarouge de 1 m de distance focale construit par M. Migeotte (5) il y a quelques années à l'Institut d'Astrophysique de Cointe (Université de Liège). La résolution de cet appareil ne peut rivaliser avec celle des spectromètres plus récents et pour nos spectres elle doit être d'environ 0,4 ou 0,5 cm<sup>-1</sup> dans la région de 1000 cm<sup>-1</sup>. Les spectres étudiés sont compris entre 730 et 1060 cm<sup>-1</sup>.

La précision des mesures est limitée par suite de la méthode utilisée basée sur l'observation de l'angle de rotation du réseau. De plus il y avait des erreurs systématiques périodiques introduites par la vis entraînant le mouvement de rotation du réseau. La méthode utilisée pour les

mesures est la même que celle décrite précédemment (6) mais en ajoutant la correction des erreurs systématiques périodiques. Il semble que la précision obtenue doit être de quelques centièmes de  $\text{cm}^{-1}$  dans la région de  $1000 \text{ cm}^{-1}$ .

Les molécules deutérosubstituées ont été préparées suivant la méthode de Jungers et Verhulst (7), et les échantillons utilisés sont ceux qui ont servi à de Hemptinne et Coll (1,2,3).

La seule structure qu'il fut possible de mettre en évidence est une série de branches Q pour les vibrations perpendiculaires à l'axe de la molécule : vibrations gauches ou déformation CH, CD. C'est donc cette structure qu'il faut analyser.

Pour les bromures de vinyle le moment d'inertie principal, suivant l'axe de la molécule, est assez petit. Bien que ce ne soit vrai que pour l'équilibre, nous pouvons admettre pour ce qui nous occupe ici qu'il est la différence entre les deux autres moments. Ceux-ci sont assez grands et donc la différence relative entre eux est faible et nous pouvons traiter cette molécule comme une toupie symétrique. Cette approximation semble pouvoir être admise sauf au centre de la bande et pour les petites valeurs de K.

Les premiers termes de l'énergie de rotation sont :

$$F_c(J, K) = B_v J(J + 1) + (A_v - B_v) K^2$$

avec

$$A = \frac{h}{8\pi^2 c I_A}$$

$$B = \frac{h}{8\pi^2 c \left( \frac{I_B + I_C}{2} \right)}$$

Comme il n'y a pas de niveaux dégénérés nous ne devons pas introduire les facteurs  $\zeta$  des forces de Coriolis.

Les branches Q des sous-bandes formant les séries P et R correspondent aux transitions  $K = \mp 1; J = 0$ .

Si  $v_0$  est l'énergie de la transition de vibration, les raies sont obtenues par la formule :

$$v_0 + (A' - B') \pm 2(A' - B')K + [(A' - B') - (A'' - B'')]K^2 + (B' - B'')J(J + 1)$$

Le dernier terme donnerait la structure fine des branches Q. Elle ne peut être résolue sur nos spectres, mais ce terme est la cause d'une assez grande largeur des raies obtenues.

L'analyse de la bande peut se faire par la méthode des différences :

$$R(K) - P(K) = 4(A' - B')K$$

$$R(K - 1) - P(K + 1) = 4(A'' - B'')K$$

Nous séparons donc les constantes des niveaux inférieur et supérieur. En fait, si on met les valeurs observées pour

$$\frac{R(K) - P(K)}{K} \text{ et } \frac{R(K-1) - P(K+1)}{K}$$

en fonction de  $K^2$ , on trouve des droites mais elles ne sont pas horizontales. On voit la séparation très nette entre les deux séries par suite de la différence entre les constantes des niveaux supérieur et inférieur. On peut l'observer sur la figure 1 pour la bande  $\nu_8$  du CHD = CHBr cis.

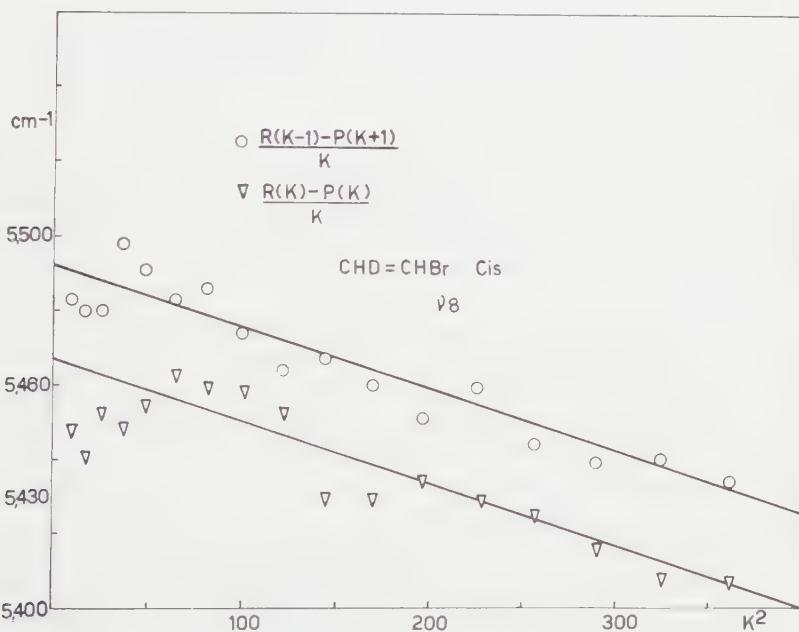


Fig. 1 —  $\frac{R(K) - P(K)}{K}$  et  $\frac{R(K-1) - P(K+1)}{K}$  en fonction de  $K^2$  pour la bande  $\nu_8$  du CHD = CHBr cis

La pente de la courbe résulte probablement du fait que nous n'avons tenu compte que des premiers termes de l'énergie de rotation. Il faudrait ajouter les termes

$$- D_J J^2(J+1)^2 - D_{JK} J(J+1) K^2 - D_K K^4$$

et c'est normalement le dernier terme qui doit intervenir ici. Si on en tient compte, les différences seconde deviennent :

$$\frac{R(K) - P(K)}{K} = 4(A' - B') - 8D'_K K^2$$

$$\frac{R(K-1) - P(K+1)}{K} = 4(A'' - B'') - 8D''_K K^2$$

La pente obtenue pour les droites permet la détermination de la valeur de  $D_K$ . On obtient :

CHD	= CHBr cis $\nu_8$ (vibration gauche)	$1,9 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$
CH <sub>2</sub>	= CDBr	» 1,7
CD <sub>2</sub>	= CHBr	$\nu_8$ (déformation CH <sub>2</sub> ) 1,6

Ces valeurs concordent assez bien, et ce résultat est intéressant car ces constantes  $D_K$  ne sont pas obtenues par les spectres de microondes.

Pour la détermination des moments d'inertie du niveau fondamental les spectres des microondes doivent donner des résultats plus précis que les spectres infrarouges. Il ressort des bandes analysées que les différences A — B sont partout légèrement supérieures à celles que l'on peut calculer d'après les moments d'inertie fournis par Manneback et Rahman.

Comme les valeurs des constantes du niveau fondamental sont assez différentes pour les composés cis et trans, l'attribution est possible dans le cas d'un mélange des deux formes. C'est ainsi que dans le mélange CHD — CHBr cis et trans la bande d'absorption obtenue par Charette et de Hemptinne à  $793-811 \text{ cm}^{-1}$  est en fait tout entière attribuable à la première forme, et le spectre ne montre pas trace d'une bande à  $811 \text{ cm}^{-1}$  pour la seconde forme.

Un autre résultat qu'il est possible d'obtenir au moyen de ces spectres est une certaine indication sur la différence entre les constantes des deux niveaux de la transition. Jusqu'à présent nous avons analysé la bande de déformation CH<sub>2</sub>  $\nu_3$  et les bandes de vibration gauches  $\nu_7$  et  $\nu_8$  pour plusieurs formes isotopiques. Les différences  $(A_0 - B_0) - (A_v - B_v)$  sont négatives pour  $\nu_3$  et positives pour  $\nu_7$  et  $\nu_8$ . Dans le cas de  $\nu_8$  le nombre de raies est suffisant pour qu'il soit possible de faire des mesures numériques et on trouve que la différence vaut environ  $0,007 \text{ cm}^{-1}$ . Pour  $\nu_3$  les résultats sont moins précis et les deux bandes analysées donnent —0,005 et —0,008.

Nous remercions M. le Professeur de Hemptinne de l'Université de Louvain grâce à qui nous avons pu utiliser les échantillons de bromures de vinyle substitués, et Monsieur le Professeur Migeotte de l'Université de Liège qui a mis son spectrographe à notre disposition.

## BIBLIOGRAPHIE

(<sup>1</sup>) M. DE HEMPTINNE et C. VELGHE, *Bull. Ac. Roy. Belg.*, **30**, 75, 1944.  
(<sup>2</sup>) H.W. THOMPSON et P. TORKINGTON, *Proc. Roy. Soc.*, London, **184 A**, 236, 1945.  
J. CHARETTE et M. DE HEMPTINNE, *Bull. Ac. Roy. Belg.*, **38**, 934, 1952.  
C.W. GULLIKSON et J.R. NIELSEN, *J. Mol. Spect.*, **1**, 158, 1957.  
R. VAN RIET et M. DE HEMPTINNE, *Ann. Soc. Sc. Brux.*, **72**, 122, 1958.  
R. VAN RIET et M. DE HEMPTINNE, *Ann. Soc. Sc. Brux.*, **74**, 75, 1960.  
(<sup>3</sup>) C.D. CORNWELL, *J. Chem. Phys.*, **18**, 1118, 1950.  
P. GOEDERTIER et K.L. LEE, *Ann. Soc. Sc. Brux.*, **71**, 128 et 184, 1957.  
R.E. GOEDERTIER, *Ann. Soc. Sc. Brux.*, **74**, 134, 1960.  
R.E. GOEDERTIER, *Bull. Cl. Sc. Ac. Roy. Belg.*, **46**, 767, 1960.  
S. DE HEPCEÉ, Mémoire de Licence, Université de Louvain, 1961.  
(<sup>4</sup>) C. MANNEBACK et A. RAHMAN, *Ann. Soc. Sc. Brux.*, **67**, 28, 1953.  
(<sup>5</sup>) M. MIGEOTTE, *Mém. Soc. Sc. Liège*, Coll. in 4<sup>o</sup>, **1**, fasc. 3, 1945.  
(<sup>6</sup>) C. COURTOY et M. DE HEMPTINNE, *Ann. Soc. Sc. Brux.*, **66**, 82, 1952.  
(<sup>7</sup>) J.C. JUNGERS et J. VERHULST, *Mém. Ac. Roy. Belg.*, in 8<sup>o</sup>, **23**, fasc. 2, 1949.

## Une méthode de mesure des sections efficaces d'échange de charge

PAR

J. STEYAERT (\*), J. BOUCHAT, J.M. DELFOSSE

Lorsqu'une molécule chargée  $i$  fois, traverse un gaz constitué de molécules B elle peut, entre autres, échanger une ou plusieurs de ses charges avec B. Ce mécanisme se note par le symbole suivant :



La probabilité de cet événement se traduit par une section efficace  $\sigma_{if}$ , où  $i$  et  $f$  représentent respectivement les nombres de charges élémentaires initiales et finales de A.

Si  $N_0 \cdot N$  représente le nombre de particules A échangeant leur charge suivant le processus  $i-f$  en traversant une longueur  $l$  d'un gaz cible contenant  $n$  molécules par  $\text{cm}^3$ , on peut écrire

$$N = N_0 \exp(-nl\sigma_{if})$$

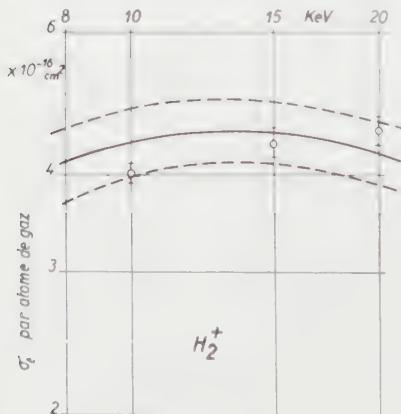


Fig. 1

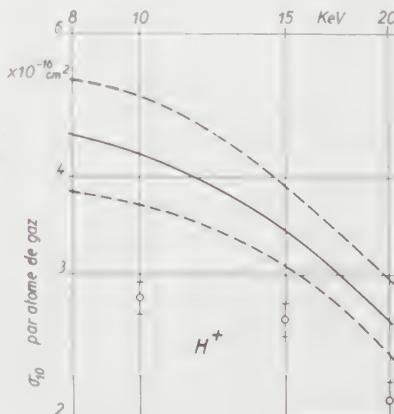


Fig. 2

(\*) Boursier de l'I.I.S.N.

La détermination de  $\sigma_{if}$  peut donc se faire à partir de  $N_0$  et de  $N$ . Soit en mesurant le rapport  $N/N_0$ , c'est la méthode d'atténuation, soit en mesurant le nombre  $N' = N - N_0$  de particules du type B formées pendant le trajet.

Nous avons mesuré la section efficace  $\sigma_{10}$  de  $H_2$  et  $H$  dans l'hydrogène par la méthode d'atténuation de courant. Nous avons à cet effet utilisé le spectrographe de masse du C.P.N.L. à double focalisation. La chambre de réaction, constituée par l'entrefer de l'électro-aimant (fig. 3), ne communique avec le reste de l'appareil que par un canal de 2/10 de mm de diamètre. Une sonde placée à l'endroit de la plaque photographique permet de mesurer des courants d'ions de masse déterminée. La mesure consiste donc à mesurer l'atténuation de courant au collecteur de la sonde après introduction d'hydrogène à une pression connue.

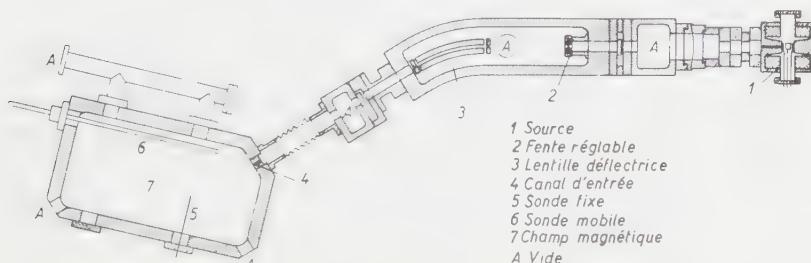


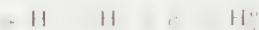
Fig. 3

En effet, les ions qui échangent leur charge avec les atomes du gaz décrivent dans l'entrefer une trajectoire rectiligne et sont éliminés du faisceau. L'ionisation éventuelle  $\sigma_{01}$  de ces atomes neutres ne permet généralement pas aux pressions utilisées d'atteindre le collecteur. Remarquons enfin que la fente du collecteur est suffisamment large pour accepter les ions du faisceau qui auraient éventuellement subi des chocs élastiques ou inélastiques. Des expériences faites sur plaques photographiques montrent d'ailleurs que cet élargissement est négligeable pour  $H_2^+$  et  $H^+$  dans l'Hydrogène aux pressions inférieures à  $10^{-3}$  mm.

Les résultats de nos mesures sont représentés aux figures 1 et 2. Les valeurs obtenues par d'autres auteurs, portées à titre de comparaison, se situent entre les deux lignes interrompues.

Dans le cas de  $H^+$  nos valeurs sont plus basses; ce qui pourrait s'expliquer par une erreur systématique dans la mesure de la pression (<sup>1</sup>) à (<sup>8</sup>), (<sup>10</sup>).

En ce qui concerne  $H_2^+$ , les réactions ci-dessous sont toutes possibles (6), (9) à (11).



et contribuent à des degrés divers à l'atténuation du courant. C'est donc la section efficace totale  $\sigma_t$  correspondant à ces divers processus qui a été mesurée. Contrairement à celle de  $H^+$ , cette valeur est en meilleur accord avec celle des autres auteurs.

En conclusion, cette méthode de mesure est simple, mais on ne peut en espérer que des mesures de sections efficaces absolues peu précises, et dans beaucoup de cas la somme seulement de réactions élémentaires peut être mesurée. Etant donnée cependant la haute sélectivité en énergie (0,5%) des ions produits dans un spectrographe de masse à double focalisation, cet appareil semble tout particulièrement adapté à l'étude de la variation de la section efficace avec l'énergie et tout particulièrement à la détection de phénomènes de résonances récemment mis en évidence (12) (13).

## RÉFÉRENCES

- (1) FOGEL et al., *JETP*, **1** (1955), 415.
- (2) KEENE, *Phil. Mag.*, **40** (1949), 369.
- (3) STIER et al., *Phys. Rev.*, **103** (1956), 896.
- (4) CURRAN et al., *Phys. Rev.*, **114** (1959), 490.
- (5) KASNER et al., Cf. Allison, *Rev. Mod. Phys.*, **30** (1958), 1137.
- (6) STEDEFORD et al., *Proc. Roy. Soc. A*, **227** (1955), 466.
- (7) WHITTIER, *Can. Journ. Phys.*, **32** (1954), 275.
- (8) FITE et al., *Phys. Rev.*, **112** (1958), 1161.
- (9) FEDORENKO et al., *JETP*, **9** (1959), 267.
- (10) SCHWIRZKE, *Z. Physik*, **157** (1960), 510.
- (11) AFROSIMOV et al., *JETP*, **7** (1958), 968.
- (12) CURRAN et al., *Phys. Rev.*, **118** (1960), 1233.
- (13) DONAHUE et al., *Phys. Rev. Letters*, **3** (1959), 470.

## Corrélation directionnelle bêta-gamma dans Ho<sup>166</sup>

PAR

J. P. DEUTSCH (\*) — L. GRENAKS — P. LIPNIK (\*)  
*Centre de Physique Nucléaire, Université de Louvain, Belgique*

Environ 40% de Ho<sup>166</sup> (27 h) se désexcite par l'intermédiaire du premier état excité de Er<sup>166</sup> (1). Les mesures faites à ce jour fournissent pour les moments angulaires et parités des états intervenant dans la cascade bêta 1770 Kev — gamma 80 Kev, les valeurs : 0—, 2+, 0+; la transition bêta serait de type «unique, une fois interdite» (2). La possibilité d'une séquence 1—, 2+, 0+ ne peut toutefois pas être écartée avec certitude.

Dans la présente note nous rapportons les résultats de mesures de corrélation directionnelle bêta-gamma différentielle effectuées sur cette cascade.

Le dispositif expérimental utilisé a été décrit précédemment (3). Ho<sup>166</sup> est obtenu en irradiant du Ho<sub>2</sub>O<sub>3</sub> au réacteur B.R.1 de Mol. La source a une épaisseur inférieure à 1 mg/cm<sup>2</sup>; elle est formée par évaporation d'une solution aqueuse sur du zapon de 10 microgrammes/cm<sup>2</sup>. Les résultats sont corrigés en des coïncidences fortuites, de l'angle solide fini des détecteurs et de la rétrodiffusion d'une partie des rayons bêta sur le détecteur, scintillateur plastique Ne 102.

Les résultats nous ont permis de déterminer par la méthode des moindres carrés le paramètre A<sub>2</sub> de la fonction de corrélation :

$$W(\theta) = 1 + A_2 P_2(\cos \theta)$$

où θ est l'angle formé par les directions d'émission des rayons bêta et gamma et P<sub>2</sub>(cos θ) le polynôme de Legendre du second ordre. La contribution de polynômes d'ordre supérieur est négligeable.

La valeur du paramètre A<sub>2</sub> en fonction de l'énergie cinétique E du rayon bêta est reportée à la Figure 1. Les erreurs indiquées sont purement statistiques. Nous avons également porté sur la Figure 1 une courbe ajustée aux points expérimentaux par la méthode des moindres

(\*) Chercheur agréé de l'Institut Interuniversitaire des Sciences Nucléaires.

carrés et pour laquelle nous avons choisi l'hypothèse d'une transition bêta «unique une fois interdite» avec correction coulombienne sur  $A_2$ . La dépendance en énergie du coefficient de corrélation  $A_2$  est en accord avec celle d'une transition  $B_{ij}$  pure.

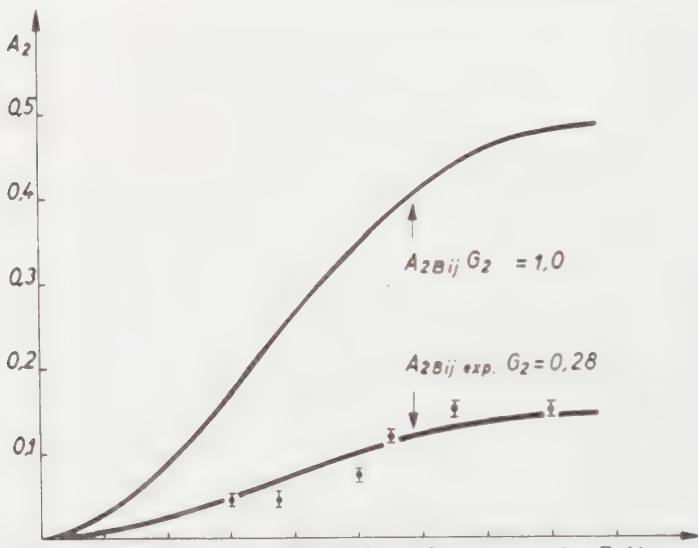


Fig. 1

Nos résultats sont en faveur de l'hypothèse d'une séquence 0-, 2+, 0+; il faut alors supposer que la corrélation directionnelle est atténuée dans  $\text{Ho}_2\text{O}_3$  d'un facteur  $G_2 = 0.28 \pm 0.01$ .

Une telle atténuation est d'ailleurs suggérée par le temps de vie relativement élevé de l'état intermédiaire ( $1.8 \times 10^{-9}$  sec) (4) et l'atténuation trouvée dans la corrélation directionnelle gamma-gamma passant par ce même état pour une source de  $\text{Ho}(\text{NO}_3)_3$  ( $G_2 = 0.38 \pm 0.01$ ) (5).

Nous ne pouvons toutefois pas rejeter l'hypothèse de la séquence 1-, 2+, 0+. Pour une telle séquence, une contribution importante d'éléments de matrice d'ordre tensoriel un serait à exclure en raison de la forte corrélation directionnelle trouvée. Une transition « $B_{ij}$  pure» — bien que peu probable dans l'hypothèse de cette séquence — ne pourrait toutefois pas être exclue complètement. Elle exigerait cependant une atténuation moins importante :  $G_2 = 0.54 \pm 0.02$ .

En conclusion, nous pouvons affirmer que nos résultats sont en faveur de l'hypothèse d'une séquence (0-) — (2+) — (0+); l'hypothèse de la séquence (1-) (2-) (0-) ne peut pas être exclue sans une

détermination indépendante du facteur d'atténuation dans du  $\text{Ho}_2\text{O}_3$  par la méthode des corrélations directionnelles gamma-gamma. Ce dernier point est actuellement à l'étude.

Monsieur le Professeur M. de Hemptinne a bien voulu montrer l'intérêt qu'il portait à ce travail. Nous avons largement profité des conseils de Monsieur le Professeur P.C. Macq. Nous tenons à leur exprimer nos plus vifs remerciements.

#### RÉFÉRENCES

- (<sup>1</sup>) Nuclear Data Sheets.
- (<sup>2</sup>) R. L. GRAHAM, F. L. WOLFSON, M.A. CLARK. *Phys. Rev.* **98**, 1173A (1955).
- (<sup>3</sup>) J. DEUTSCH, L. GRENACS, P. LIPNIK. Corrélation directionnelle  $\beta-\gamma$  dans  $\text{Rb}^{86}$ . *Journ. Phys. Rad.* (à paraître).
- (<sup>4</sup>) J. C.D. MILTON, J.S. FRASER, G. M. MILTON. *Phys. Rev.* **98**, 1173A (1955).
- (<sup>5</sup>) J.S. FRASER, J.C.D. MILTON, *Phys. Rev.* **98**, 1173A (1955).

## Spectres de rotation des bromures de vinyle en micro-ondes dans l'état fondamental et dans un état vibrationnel excité

PAR

S. de HEPCÉE

*Laboratoire de Physique Nucléaire et Moléculaire Université de Louvain*

C'est toujours sur la base des résultats acquis dans les études approchées de C<sup>ORNWELL</sup> (<sup>1</sup>), C<sup>HARETTE</sup> et de H<sup>EMPTINNE</sup> (<sup>2</sup>), M<sup>ANNEBACK</sup> et R<sup>AHMAN</sup> (<sup>3</sup>) que se poursuit l'étude des spectres micro-ondes de rotation des bromures de vinyle reprise par R. E. G<sup>OEDERTIER</sup> d'une façon systématique (<sup>4</sup>)(<sup>5</sup>)(<sup>6</sup>). A l'aide d'un appareil amélioré couvrant les transitions  $\Delta J = 1 \rightarrow 2$  et  $\Delta J = 2 \rightarrow 3$ , cet auteur a recueilli des spectres suffisamment complets pour permettre un calcul précis des constantes caractéristiques des molécules  $\text{CH}_2 = \text{CHBr}$ ,  $\text{CD}_2 = \text{CHBr}$ ,  $\text{CH}_2 = \text{CDBr}$ ,  $\text{CD}_2 = \text{CDBr}$ , sous leurs deux formes isotopiques en  $-\text{Br}^{79}$  et  $-\text{Br}^{81}$  (<sup>7</sup>).

Les molécules  $\text{CHD} = \text{CHBr}$  et  $\text{CHD} = \text{CDBr}$  auxquelles nous nous sommes intéressé présentent en outre l'isomérie cis-trans. Cette étude porte donc à seize le nombre de deutéro-substitués connus. Le dépouillement, en voie d'achèvement (<sup>8</sup>), des spectres de plusieurs dérivés en C<sup>13</sup> complétera ces travaux et permettra un bon calcul de la structure du bromure de vinyle.

L'appareillage dont nous nous sommes servi a été décrit dans une publication récente (<sup>9</sup>). Nos produits, préparés suivant les procédés indiqués par J<sup>UNGERS</sup> et V<sup>ERHULST</sup> (<sup>9</sup>) ne réalisent pas la séparation isomérique ni isotopique. On enregistre donc toujours simultanément le spectre de quatre dérivés, ce qui donne lieu à des recouvrements partiels. En outre, les intensités des raies individuelles sont de ce fait fort affaiblies. Compte tenu de cette diminution, le coefficient d'absorption propre des bromures de vinyle permet dans notre appareil la détection des composantes hyperfines  $\Delta F = 0, +1$ . Les transitions  $\Delta F = -1$  sont totalement inobservables. On a fait usage de basses températures (-80°C) pour mettre en évidence certaines composantes trop faibles ainsi que pour des mesures de contrôle. Le passage à ces températures augmente les intensités d'un facteur 3.

## SPECTRES

Le tableau I donne le relevé des raies observées. On y a porté en regard des fréquences, tout d'abord le degré d'imprécision de chaque mesure, qu'il soit dû à la limite de résolution de l'appareil (0.1 Mc/s) ou à la largeur du pic d'absorption. L'intensité relative est notée approximativement et, quand il y a lieu, renseignée comme étant prise à basse température. Les attributions que nous proposons ont pu être faites en se guidant sur un spectre de référence calculé à partir des dimensions fournies par MANNEBACK et RAHMAN.

Ce modèle prévoit une structure hyperfine d'interaction quadrupolaire, qui a été déterminée à partir des valeurs proposées par CARNWELL et en utilisant l'approximation de la toupie symétrique.

Notations :

— Intensités relatives (I.R.) :

w = faible (ww, www, très faible)

m = moyenne

s = forte (ss, sss, très forte)

f = observé à froid ( $-80^{\circ}\text{C}$ )

— les astérisques indiquent les transitions attribuées à un état excité de vibration.

— les isotopes en Br<sup>81</sup>-cis, Br<sup>79</sup>-trans, etc sont notés 8-c, 7-t, etc.

— l'unicité des règles de sélection ( $\Delta J = +1$ ,  $\Delta K_{-1} = 0$ ,  $\Delta K_1 = -1$ ), permet de ne mentionner que le terme inférieur de chaque transition.

TABLEAU I  
Fréquences observées

CHD = CHBr

Observé (Mc/s)	I. R.	Attribution	
23697.6	$\pm 0.1$	w	7-c $2_{11}$
646.3	0.1	s	7-c $2_{11}$
640.8	0.2	w	
629.8	0.2	w	7-c $2_{11}^*$
617.9	0.2	s	7-c $2_{11}$
609.6	0.2	w	7-c $2_{11}$
601.7	0.2	m	7-c $2_{11}^*$
593.4	0.1	f-ww	7-c $2_{11}^*$
581.5	0.3	f-www	
565.7	0.2	ww	7-c $2_{11}$
549.5	0.1	f-www	7-c $2_{11}^*$
547.7	0.2	ww	8-c $2_{11}$
504.4	0.1	ss	8-c $2_{11}$
488.3	0.2	m	8-c $2_{11}^*$
480.75	0.1	s	8-c $2_{11}$
473.3	0.2	w	8-c $2_{11}$
464.6	0.2	w	8-c $2_{11}^*$
437.1	0.1	f-w	8-c $2_{11}$

TABLEAU I (*suite*)  
Fréquences observées

CHD = CHBr

Observé (Mc/s)	I. R.	Attribution
23421.1	$\pm 0.1$	f-w
233.3	0.1	m
222.6	0.2	m
215.2	0.2	m
146.2	0.2	ww
140.9	0.1	f-w
133.6	0.2	w
118.8	0.1	w
107.95	0.05	m
100.5	0.1	m
082.2	1	m
075.4	0.1	m
068.4	0.1	m
064.9	0.2	f-www
049.0	0.2	ww
031.6	0.1	f-www
026.1	0.2	ww
019.1	0.2	ww
011.5	0.3	f-www
009.4	0.1	f-www
007.4	0.2	ww
22999.8	0.2	m
986.35	0.1	w
979.5	0.2	w
972.5	0.2	m
969.0	0.2	ww
941.4	0.1	f-www
913.8	0.1	f-www
911.7	0.2	ww
903.9	0.1	w
712.8	0.2	w
703.0	0.2	w
695.9	0.2	w
688.5	0.1	m
680.9	0.1	f-w
651.1	0.2	m
648.6	0.2	m
640.9	0.1	s
625.9	0.2	w
620.2	0.1	s
611.8	0.1	ss
610.8	0.2	ww
607.45	0.05	w
605.8	0.2	w
602.16	0.05	w
596.55	0.05	m
587.3	0.1	f-w
571.6	0.2	w
558.8	0.1	ww
556.8	0.1	ww
551.7	0.1	f-m
520.0	0.1	s
518.0	0.1	s
505.85	0.05	s.s.
496.1	0.1	f-w
494.35	0.05	s.s.
490.9	0.2	m
481.5	0.1	s.s.
		8-c $2_{11}^*$
		7-c $2_{02}$
		7-c $2_{20}$
		7-c $2_{21}$
		7-c $2_{02}$
		7-c $2_{20}$
		7-c $2_{21}$
		7-c $2_{02}$
		7-c $2_{20}$
		7-c $2_{21}$
		7-c $2_{02}$
		7-c $2_{20}$
		7-c $2_{21}$
		7-c $2_{02}$
		8-c $2_{02}$
		8-c $2_{21}$
		8-c $2_{02}$
		8-c $2_{20}$
		8-c $2_{21}$
		8-c $2_{02}$
		8-c $2_{02}$
		8-c $2_{20}$
		8-c $2_{21}$
		8-t $2_{11}^*$
		7-t $2_{12}$
		7-t $2_{11}^*$
		7-t $2_{12}$
		7-t $2_{11}^*$
		7-t $2_{12}$
		7-t $2_{11}^*$
		7-t $2_{12}$
		7-t $2_{11}^*$
		7-t $2_{12}$
		7-t $2_{11}^*$
		8-t $2_{11}$
		8-c $2_{12}$
		8-c $2_{12}$
		8-t $2_{11}$
		8-c $2_{12}$
		8-t $2_{11}^*$
		8-t $2_{11}$

TABLEAU I (*suite*)  
Fréquences observées

CHD = CHBr

Observé (Mc/s)	I. R.	Attribution
22473.4	$\pm 0.1$	
470.5	0.2	f-w
466.4	0.1	www
443.1	0.2	m
436.0	0.2	w
349.0	0.2	m
329.6	0.1	www
325.8	0.1	s
260.0	0.2	s
245.5	0.1	www
241.7	0.2	www
231.0	0.2	m
229.8	0.2	ww
211.3	0.1	f-s
208.0	0.1	f-s
202.7	0.1	f-ww
187.6	0.2	ww
184.2	0.2	m
153.7	0.2	w
149.4	0.2	ww
128.3	0.2	w
124.0	0.2	f-w
127.6	0.1	f-m-w
117.2	0.2	ww
113.9	0.2	ww
104.1	0.2	w
088.7	0.1	f-s
085.5	0.1	f-s
058.1	0.1	fw
030.2	0.2	ww
018.5	0.1	www
015.5	0.1	w
21937.15	0.05	m
916.3	0.2	f-www
874.3	0.2	m
873.1	0.1	s
853.1	0.2	w
844.3	0.1	ss
829.7	0.2	m
822.8	0.2	m
808.6	0.1	f-ww
800.6	0.1	w
781.7	0.2	w
779.4	0.1	f-www
764.4	0.2	w
760.0	0.2	f-www
747.6	0.1	s.s.
746.6	0.2	m
726.7	0.2	f-ww
725.5	0.2	f-ww
722.7	0.1	sss
710.6	0.2	m
701.13	0.2	m
693.5	0.5	f-www
689.6	0.1	f-w
670.2	0.2	w
662.0	0.2	f-www
657.0	2	f-ww
22473.4	$\pm 0.1$	8-t 2 <sub>11</sub>
470.5	0.2	www
466.4	0.1	8-t 2 <sub>11</sub> *
443.1	0.2	8-c 2 <sub>12</sub>
436.0	0.2	8-t 2 <sub>11</sub>
349.0	0.2	7-t 2 <sub>02</sub>
329.6	0.1	7-t 2 <sub>20</sub>
325.8	0.1	7-t 2 <sub>21</sub>
260.0	0.2	7-t 2 <sub>02</sub>
245.5	0.1	7-t 2 <sub>20</sub>
241.7	0.2	7-t 2 <sub>21</sub>
231.0	0.2	7-t 2 <sub>02</sub>
229.8	0.2	7-t 2 <sub>20</sub>
211.3	0.1	7-t 2 <sub>20</sub>
208.0	0.1	7-t 2 <sub>21</sub>
202.7	0.1	8-t 2 <sub>02</sub>
187.6	0.2	m
184.2	0.2	8-t 2 <sub>20</sub>
153.7	0.2	8-t 2 <sub>21</sub>
149.4	0.2	ww
128.3	0.2	w
124.0	0.2	f-w
127.6	0.1	7-t 2 <sub>21</sub>
117.2	0.2	ww
113.9	0.2	ww
104.1	0.2	w
088.7	0.1	f-s
085.5	0.1	f-s
058.1	0.1	fw
030.2	0.2	ww
018.5	0.1	www
015.5	0.1	w
21937.15	0.05	m
916.3	0.2	7-t 2 <sub>12</sub>
874.3	0.2	7-t 2 <sub>12</sub> *
873.1	0.1	7-t 2 <sub>12</sub>
853.1	0.2	7-t 2 <sub>12</sub> *
844.3	0.1	7-t 2 <sub>12</sub>
829.7	0.2	7-t 2 <sub>12</sub>
822.8	0.2	7-t 2 <sub>12</sub> *
808.6	0.1	7-t 2 <sub>12</sub> *
800.6	0.1	8-t 2 <sub>12</sub>
781.7	0.2	w
779.4	0.1	7-t 2 <sub>12</sub>
764.4	0.2	8-t 2 <sub>12</sub> *
760.0	0.2	f-www
747.6	0.1	8-t 2 <sub>12</sub>
746.6	0.2	m
726.7	0.2	f-ww
725.5	0.2	f-ww
722.7	0.1	sss
710.6	0.2	m
701.13	0.2	m
693.5	0.5	8-t 2 <sub>12</sub> *
689.6	0.1	8-t 2 <sub>12</sub> *
670.2	0.2	8-t 2 <sub>12</sub>
662.0	0.2	8-t 2 <sub>12</sub> *
657.0	2	8-t 2 <sub>12</sub> *
22473.4	$\pm 0.1$	5/2 - 5/2
470.5	0.2	7/2 - 9/2
466.4	0.1	3/2 - 3/2
443.1	0.2	3/2 - 3/2
436.0	0.2	3/2 - 3/2
349.0	0.2	7/2 - 7/2
329.6	0.1	(5/2 - 7/2) + (5/2 - 5/2)
325.8	0.1	(5/2 - 7/2) + (5/2 - 5/2)
260.0	0.2	(3/2 - 5/2) + (1/2 - 3/2)
245.5	0.1	(3/2 - 5/2) + (3/2 - 3/2)
241.7	0.2	(3/2 - 5/2) + (3/2 - 3/2)
231.0	0.2	(7/2 - 9/2) + (5/2 - 7/2)
229.8	0.2	(7/2 - 9/2) + (5/2 - 7/2)
211.3	0.1	(7/2 - 9/2) + (7/2 - 7/2)
208.0	0.1	(7/2 - 9/2) + (7/2 - 7/2)
202.7	0.1	7/2 - 7/2
187.6	0.2	(5/2 - 7/2) + (5/2 - 5/2)
184.2	0.2	(5/2 - 7/2) + (5/2 - 5/2)
153.7	0.2	(5/2 - 7/2) + (5/2 - 5/2)
149.4	0.2	(3/2 - 5/2) + (1/2 - 3/2)
128.3	0.2	1/2 - 3/2
124.0	0.2	1/2 - 3/2
127.6	0.1	1/2 - 3/2
117.2	0.2	(3/2 - 5/2) + (3/2 - 3/2)
113.9	0.2	(3/2 - 5/2) + (3/2 - 3/2)
104.1	0.2	(7/2 - 9/2) + (5/2 - 7/2)
088.7	0.1	(7/2 - 9/2) + (7/2 - 7/2)
085.5	0.1	(7/2 - 9/2) + (7/2 - 7/2)
058.1	0.1	5/2 - 5/2
030.2	0.2	3/2 - 3/2
018.5	0.1	1/2 - 3/2
015.5	0.1	1/2 - 3/2
21937.15	0.05	7/2 - 7/2
916.3	0.2	7/2 - 7/2
874.3	0.2	3/2 - 5/2
873.1	0.1	5/2 - 7/2
853.1	0.2	5/2 - 7/2
844.3	0.1	7/2 - 9/2
829.7	0.2	5/2 - 5/2
822.8	0.2	7/2 - 9/2
808.6	0.1	5/2 - 5/2
800.6	0.1	7/2 - 7/2
781.7	0.2	3/2 - 3/2
779.4	0.1	7/2 - 7/2
764.4	0.2	8-t 2 <sub>12</sub> *
760.0	0.2	3/2 - 3/2
747.6	0.1	5/2 - 7/2
746.6	0.2	m
726.7	0.2	8-t 2 <sub>12</sub> *
725.5	0.2	8-t 2 <sub>12</sub> *
722.7	0.1	5/2 - 7/2
710.6	0.2	7/2 - 9/2
701.13	0.2	5/2 - 5/2
693.5	0.5	7/2 - 9/2
689.6	0.1	5/2 - 5/2
670.2	0.2	3/2 - 3/2
662.0	0.2	5/2 - 5/2
657.0	2	3/2 - 3/2

TABLEAU I (suite)  
Fréquences observées

CHD - CHBr

Observé (Mc/s)	I. R.	Attribution
21648.9	$\pm$ 0.1	
15842.4	0.2	f-ww
805.95	0.1	w
778.1	0.1	ww
734.7	0.1	w
726.9	0.1	m
723.9	0.2	www
720.9	0.2	www
716.5	0.1	ww
704.5	0.1	w
691.5	0.1	ww
681.5	0.2	www
638.7	0.1	w
609.0	0.1	w
566.2	0.1	f-ww
534.7	0.2	f-ww
524.5	0.1	w
426.7	0.1	www
418.4	0.1	w
409.8	0.5	m
396.55	0.5	w
328.8	0.1	w
322.6	0.1	m
309.4	0.1	w
254.6	0.1	w
175.8	0.1	w
173.7	0.1	w
135.2	0.2	www
130.7	0.1	www
124.7	0.1	f-w
110.0	0.2	www
076.3	0.1	ww
070.4	0.1	ww
060.3	0.1	m
055.3	1	m
045.0	0.2	ww
038.6	0.1	w
033.5	0.1	ww
028.5	0.1	ww
017.7	0.1	ww
14996.1	0.1	ww(w)
979.9	0.1	m
976.1	0.1	ww
971.4	0.1	m
966.6	0.1	f-w
964.2	0.1	ww
962.1	0.1	w
944.5	0.1	f-w
942.5	0.2	w
937.0	0.2	f-w
934.1	0.1	ww
909.1	0.2	ww
897.3	0.1	ww
849.3	0.1	f-w
839.6	0.1	f-w
831.0	0.1	ww
825.9	0.1	f0w
816.1	0.1	s

TABLEAU I (*suite*)  
Fréquences observées

CHD = CHBr

Observé (Mc/s)	I.R.	Attribution	
14754.7 $\pm$ 0.1	f-www		
732.4 0.1	s	8-t 1 <sub>01</sub>	(5/2 - 7/2) + (3/2 - 5/2)
720.4 0.1	m		
662.6 0.1	w	8-t 1 <sub>01</sub>	3/2 - 3/2
660.0 0.1	w	7-t 1 <sub>11</sub>	3/2 - 5/2
615.5 0.1	www	7-t 1 <sub>11</sub>	3/2 - 3/2
605.5 0.2	www	7-t 1 <sub>11</sub>	5/2 - 5/2
562.7 0.1	w	8-t 1 <sub>11</sub>	3/2 - 5/2
541.2 0.1	m	7-t 1 <sub>11</sub>	5/2 - 7/2
525.7 0.2	ww	8-t 1 <sub>11</sub>	3/2 - 3/2
526.9 0.2	www		
517.5 0.2	ww	{ 8-t 1 <sub>11</sub>	5/2 - 5/2
		{ 7-t 1 <sub>11</sub>	1/2 - 3/2
463.4 0.1	m-s	8-t 1 <sub>11</sub>	5/2 - 7/2
454.7 0.1	f-ww	7-t 1 <sub>11</sub>	1/2 - 1/2
449.5 0.2	f-www		
444.0 0.2	w		
409.6 0.4	www		
399.0 0.1	www		
391.1 0.1	w		
388.4 0.2	www	8-t 1 <sub>11</sub>	1/2 - 1/2

### FRÉQUENCES DE ROTATION ET CONSTANTES QUADRIPOLAIRES

Le calcul des huit fréquences de rotation de chaque molécule et des constantes de structure hyperfine  $eq_m Q$  et  $\gamma$  a été fait en négligeant l'effet du 2d ordre du couplage quadripolaire. Malgré la grandeur assez importante que peut atteindre cette correction (jusque 1 Mc/s) son influence sur la valeur des fréquences de rotation et des constantes ne dépasse pas celle de l'imprécision inhérente aux mesures (pourtant de 0.1 à 0.3 Mc/s seulement). En effet, l'approximative symétrie du splitting autour de la fréquence de rotation entraîne, du point de vue du calcul, une certaine neutralisation de l'effet du 2d ordre, comme l'a d'ailleurs confirmé l'examen des résultats. Ainsi, notamment, les huit valeurs obtenues pour les constantes quadripolaires d'une même molécule ne s'écartent pas de leur moyenne pondérée au delà de ce qui est prévu par la précision inhérente aux mesures (tableaux II et III).

TABLEAU I (suite)  
Fréquences observées

$$\text{CHD} = \text{CDBr}$$

TABLEAU I (suite)  
Fréquences observées

CHD = CDBr

Observé (Mc/s)	I.R.	Attribution	
22474.4	$\pm 0.1$	f-m	
473.4	0.1	f-m	
455.1	0.2	f-w-m	
449.4	0.1	ww	8-t $2_{02}$
429.6	0.1	f-m-s	8-t $2_{20}$
420.5	0.2	www	8-t $2_{02}$
418.5	0.2	www	
416.1	0.1	f-m-s	8-t $2_{21}$
327.4	0.2	w	7-c $2_{11}$
270.55	0.1	ss	7-c $2_{11}$
255.9	0.2	f-w	7-c $2_{11}^*$
243.4	0.1	ww	
240.8	0.1	sss	7-c $2_{11}$
230.7	0.1	w	7-c $2_{11}$
226.4	0.1	w	7-c $2_{11}^*$
215.9	0.2	f-ww	7-c $2_{11}^*$
207.7	0.1	f-w-m	
205.5	0.1	f-w	
187.7	0.1	f-w-m	
184.2	0.1	f-w	7-c $2_{11}$
181.8	0.1	f-w	8-c $2_{11}$
151.0	0.2	f-ww	
143.7	0.1	f-ww	
137.3	0.1	f-ww	
134.4	0.1	ss	8-c $2_{11}$
120.0	0.1	m	8-c $2_{11}^*$
112.3	0.1	f-ww	
109.5	0.1	ss	8-c $2_{11}$
103.9	0.2	f-w	
100.75	0.1	ww	8-c $2_{11}$
094.9	0.1	w	8-c $2_{11}^*$
086.4	0.2	www	8-c $2_{11}^*$
082.7	0.1	www	
080.3	0.2	ww	
072.5	0.1	m	7-t $2_{12}$
071.4	0.1	s	7-t $2_{12}$
062.1	0.2	w	8-c $2_{11}$
050.9	0.2	www	
048.4	0.1	ww	8-c $2_{11}^*$
046.3	0.1	ww	7-t $2_{12}^*$
042.9	0.1	w	7-t $2_{12}$
041.3	0.1	ss	7-t $2_{12}$
027.3	0.1	w	7-t $2_{12}$
017.3	0.1	w	7-t $2_{12}^*$
007.2	0.2	www	
003.4	0.2	www	7-t $2_{12}^*$
21994.6	0.1	w	8-t $2_{12}$
979.8	0.1	w	7-t $2_{12}$
973.7	0.2	www	
971.3	0.2	www	
955.7	0.2	www	7-t $2_{12}^*$
950.6	0.2	ww	
943.0	0.1	w	8-t $2_{12}$
941.1	0.1	m	8-t $2_{12}$
926.8	0.2	ww	
917.0	0.1	m	8-t $2_{12}$
905.2	0.2	w	8-t $2_{12}$
897.9	0.1	w	

TABLEAU I (*suite*)  
Fréquences observées

CHD - CHBr

Observé (Mc/s)	I.R.	Attribution
21893.15 ± 0.1	w	7-c 2 <sub>02</sub>
881.2	f-ss	7-c 2 <sub>20</sub>
874.6	ww	
873.7	f-ss	7-c 2 <sub>21</sub>
869.1	ww	
865.5	ww	8-t 2 <sub>12</sub>
844.7	w	
805.5	f-w	
803.1	f-m	7-c 2 <sub>02</sub>
795.6	f-s	7-c 2 <sub>20</sub>
788.2	f-s	7-c 2 <sub>21</sub>
781.6	w	
774.1	w	7-c 2 <sub>02</sub>
760.9	f-ss	7-c 2 <sub>20</sub>
753.6	f-ss	7-c 2 <sub>21</sub>
747.4	w	8-c 2 <sub>02</sub>
746.7	w	
739.9	m	
738.8	f-ss	8-c 2 <sub>20</sub>
731.8	f-ss	8-c 2 <sub>21</sub>
722.5	f-s	
718.1	f-ww	7-c 2 <sub>02</sub>
683.5	f-ww	7-c 2 <sub>02</sub>
675.6	f-m	7-c 2 <sub>20</sub>
673.9	m	
671.5	m	8-c 2 <sub>02</sub>
668.2	f-ww	7-c 2 <sub>21</sub>
667.5	f-s	8-c 2 <sub>20</sub>
660.2	f-s	8-c 2 <sub>21</sub>
647.4	m	8-c 2 <sub>02</sub>
638.5	f-ss	8-c 2 <sub>20</sub>
631.4	fsss	8-c 2 <sub>21</sub>
600.5	f-w	8-c 2 <sub>02</sub>
596.9	f-m	
595.6	f-m	
581.3	www	
571.8	ww	8-c 2 <sub>02</sub>
567.2	f-w	8-c 2 <sub>20</sub>
560.0	m	8-c 2 <sub>21</sub>
400.0	ww	7-c 2 <sub>12</sub>
347.8	www	
337.9	w	7-c 2 <sub>12</sub>
336.2	m	7-c 2 <sub>12</sub>
318.1	ww	
314.8	ww	7-c 2 <sub>12</sub> *
306.5	s	7-c 2 <sub>12</sub>
292.8	w	7-c 2 <sub>12</sub>
285.1	w	7-c 2 <sub>12</sub> *
271.4	0.2	7-c 2 <sub>12</sub> *
264.0	ww	8-c 2 <sub>12</sub>
244.5	ww	7-c 2 <sub>12</sub>
222.7	ww	7-c 2 <sub>12</sub> *
212.3	w-m	8-c 2 <sub>12</sub>
210.8	m	8-c 2 <sub>12</sub>
202.2	f-ww	
197.5	www	
194.0	f-www	
191.0	ww	8-c 2 <sub>12</sub> *

TABLEAU I (*suite*)  
Fréquences observées

CHD = CDBr

Observé (Mc/s)	I.R.	Attribution
21189.5 $\pm$ 0.1	ww	8-c $2_{12}^*$ $5/2 - 7/2$
185.9 0.1	m	8-c $2_{12}$ $7/2 - 9/2$
174.6 0.2	w	8-c $2_{12}^*$ $5/2 - 5/2$
164.7 0.1	w	8-c $2_{12}^*$ $7/2 - 9/2$
153.1 0.2	f-www	8-c $2_{12}^*$ $5/2 - 5/2$
134.2 0.2	www	8-c $2_{12}$ $3/2 - 3/2$
15580.6 0.2	w	7-t $1_{10}$ $3/2 - 5/2$
543.1 0.1	ww	7-t $1_{10}$ $3/2 - 3/2$
517.0 0.2	w	7-t $1_{10}$ $5/2 - 5/2$
472.4 0.2	w	8-t $1_{10}$ $3/2 - 5/2$
463.4 0.1	m	7-t $1_{10}$ $5/2 - 7/2$
452.6 0.1	ww	
440.9 0.1	ww	8-t $1_{10}$ $3/2 - 3/2$
428.7 0.2	w(w)	7-t $1_{10}$ $1/2 - 3/2$
419.2 0.1	ww	8-t $1_{10}$ $5/2 - 5/2$
410.0 0.1	ww	
374.5 0.1	m	8-t $1_{10}$ $5/2 - 7/2$
363.9 0.1	ww	
345.5 0.1	ww	8-t $1_{10}$ $1/2 - 3/2$
322.7 0.1	ww	
305.0 0.1	www	
300.8 0.1	ww	8-t $1_{10}$ $1/2 - 1/2$
211.2 0.1	f-ww	7-t $1_{01}$ $1/2 - 3/2$
201.1 0.1	ww	7-t $1_{01}$ $5/2 - 5/2$
175.9 0.2	www	
173.7 0.2	www(w)	
103.1 0.1	f-w	8-t $1_{01}$ $1/2 - 3/2$
094.8 0.2	w	8-t $1_{01}$ $5/2 - 5/2$
084.1 0.1	m	7-t $1_{01}$ $(5/2 - 7/2) + (3/2 - 5/2)$
070.7 0.1	w	
060.4 0.1	ww	
055.2 0.1	ww	
045.1 0.3	www	
016.9 0.1	ww	
004.8 0.1	f-w	
001.35 0.05	m	7-t $1_{01}$ $3/2 - 3/2$
14996.9 0.1	s	8-t $1_{01}$ $(5/2 - 7/2) + (3/2 - 5/2)$
983.7 0.1	ww	
980.1 0.1	ww	
928.0 0.1	m	7-c $1_{10}$ $3/2 - 5/2$
918.6 0.1	ww	
888.1 0.1	w	7-c $1_{10}$ $3/2 - 3/2$
864.6 0.1	ww	7-c $1_{10}$ $5/2 - 5/2$
824.1 0.1	ww	8-c $1_{10}$ $3/2 - 5/2$
816.0 0.1	ww(w)	
814.3 0.2	ww(w)	
807.8 0.1	m	7-c $1_{10}$ $5/2 - 7/2$
804.8 0.2	ww	
798.1 0.1	ww	
793.1 0.1	w	7-t $1_{11}$ $3/2 - 5/2$
790.6 0.1	ww	8-c $1_{10}$ $3/2 - 3/2$
781.3 0.2	ww	
777.5 0.2	www	
774.0 0.2	ww	7-c $1_{10}$ $1/2 - 3/2$
771.0 0.1	ww	8-c $1_{10}$ $5/2 - 5/2$
761.8 0.2	www	
748.1 0.2	f-w	7-t $1_{11}$ $3/2 - 3/2$
740.0 0.2	www	7-t $1_{11}$ $5/2 - 5/2$

TABLEAU I (suite)  
*Fréquences observées*

CHD = CDBr

Observé(Mc/s)	I. R.	Attribution
14732.4	$\pm 0.1$	ww
723.4	0.1	m-w
717.5	0.1	w
713.7	0.1	w
705.9	0.1	ww
695.05	0.1	f-www
694.5	0.1	m
675.8	0.1	w-m
660.0	0.1	ww
656.3	0.1	ww
652.0	0.2	www
649.4	0.2	f-ww
647.9	0.1	f-m
643.5	0.1	f-w
633.0	0.2	w
596.2	0.1	m-s
588.75	0.05	w
580.3	0.2	www
576.0	0.1	www
548.2	0.2	f-www
541.2	0.1	www
538.7	0.1	f-w
529.6	0.1	w
523.2	0.1	ww
517.7	0.2	ww
512.9	0.1	m
500.9	0.1	w
463.4	0.2	ww
437.7	0.1	f-m
429.9	0.1	s-m
427.8	0.1	ww
417.5	0.1	w
357.9	0.1	w
304.9	0.1	ww
259.8	0.1	ww
248.0	0.1	ww
208.2	0.1	w
183.9	0.1	m
170.0	0.3	www
160.6	0.2	www
157.4	0.1	f-w
149.0	0.2	f-www
147.0	0.1	f-www
107.3	0.1	m-w
095.4	0.2	www
093.1	0.2	www
085.6	0.1	ww
033.0	0.1	ww
8-c	$1_{10}$	$5/2 - 7/2$
7-c	$1_{10}$	$1/2 - 1/2$
8-c	$1_{11}$	$3/2 - 5/2$
7-t	$1_{11}$	$5/2 - 7/2$
8-t	$1_{11}$	$1/2 - 3/2$
7-c	$1_{01}$	$1/2 - 3/2$
7-c	$1_{11}$	$5/2 - 5/2$
8-c	$1_{10}$	$1/2 - 1/2$
8-c	$1_{01}$	$1/2 - 3/2$
8-t	$1_{11}$	$5/2 - 5/2$
8-t	$1_{11}$	$5/2 - 7/2$
8-t	$1_{11}$	$1/2 - 3/2$
8-c	$1_{01}$	$1/2 - 3/2$
8-c	$1_{01}$	$5/2 - 5/2$
8-t	$1_{11}$	$1/2 - 1/2$
7-c	$1_{01}$	$1/2 - 1/2$
7-c	$1_{11}$	$(3/2 - 5/2) + (5/2 - 7/2)$
8-c	$1_{01}$	$1/2 - 1/2$
8-c	$1_{01}$	$(5/2 - 7/2) + (3/2 - 5/2)$
7-c	$1_{01}$	$3/2 - 3/2$
8-c	$1_{01}$	$3/2 - 3/2$
7-c	$1_{11}$	$3/2 - 5/2$
7-c	$1_{11}$	$3/2 - 3/2$
7-c	$1_{11}$	$5/2 - 5/2$
8-c	$1_{11}$	$3/2 - 5/2$
7-c	$1_{11}$	$5/2 - 7/2$
8-c	$1_{11}$	$3/2 - 3/2$
8-c	$1_{11}$	$5/2 - 5/2$
7-c	$1_{11}$	$1/2 - 3/2$
8-c	$1_{11}$	$5/2 - 7/2$
8-c	$1_{11}$	$1/2 - 1/2$
8-c	$1_{11}$	$1/2 - 3/2$
8-c	$1_{11}$	$1/2 - 1/2$

## CONSTANTES ROTATIONNELLES

Le tableau IV donne les constantes rotationnelles A B et C, ainsi que les constantes de distorsion centrifuge  $D_J$  et  $D_{JK}$ . La quasi-symétrie de la molécule entraîne une grande imprécision dans la détermination de la constante A, rejaillissant sur celle de B et C. La somme  $B + C$  est par contre connue à 0.3 Mc/s près. Les constantes de distorsion centrifuge sont les premières à avoir été déterminées pour les bromures de vinyle; à défaut de valeurs de comparaison, leur régularité et leur cohérence montrent qu'on peut les accepter.

## ETATS EXCITÉS DE VIBRATION

Ayant mis en évidence dans le spectre certaines structures non-identifiées, se présentant comme une répétition, à des fréquences plus basses, de transitions de l'état fondamental, nous avons été amené à formuler l'hypothèse de transitions rotationnelles au sein d'un niveau excité de vibration. Cette hypothèse fut confirmée dans la suite par une exploration à basse température : d'une part on a pu constater une différence dans l'augmentation des intensités, entre l'état fondamental et l'état excité; d'autre part on a fait apparaître de nombreuses raies nouvelles aux fréquences prévues. Dans ce cas, toutes les composantes hyperfines d'une même transition se retrouvent déplacées d'un écart quasi constant de quelque 20 Mc/s vers le bas. Les constantes de couplage quadripolaire sont donc pratiquement inchangées.

Le niveau vibrationnel en question est vraisemblablement le premier niveau de la vibration la plus basse ( $\nu_{10}$  dans la notation de CHARETTE<sup>[2]</sup>), celle de balancement du Br autour de la liaison C — Br.

Seules des raies appartenant à des transitions excitées  $2_{11}-3_{12}$  et  $2_{12}-3_{13}$  ont pu être identifiées; aucune structure particulière n'a encore pu être mise en évidence pour les autres types de transition. Les intensités d'absorption sont probablement en jeu ici. Cette limitation n'a pas permis le calcul des constantes rotationnelles correspondant à cet état excité.

Les tableaux V et VI donnent les résultats obtenus pour les transitions comportant un nombre suffisant de raies pour permettre un calcul; on les compare aux valeurs de l'état fondamental. L'ensemble des raies attribuées à l'état excité a été donné dans le tableau I.

Nous remercions Mr le Professeur de Hemptinne et Mr R.E. Goedertier pour l'aide qu'ils nous ont apportée dans notre travail. Nous remercions également les services du Comité d'Etude et d'Exploitation des Calculateurs Electroniques qui se sont chargés des plus lourdes parties du calcul.

TABLEAU II  
Fréquences de rotation

Molécule	Transition	$\nu_{\text{rot.}}$ (Mc/s)
CHD = CHBr <sup>79</sup>		
-Cis	1 <sub>01</sub> - 2 <sub>02</sub>	15419.91 ± 0.06
	1 <sub>10</sub> - 2 <sub>11</sub>	15754.71 .05
	1 <sub>11</sub> - 2 <sub>12</sub>	15089.11 .06
	2 <sub>02</sub> - 3 <sub>03</sub>	23123.76 .06
	2 <sub>11</sub> - 3 <sub>12</sub>	23629.80 .06
	2 <sub>12</sub> - 3 <sub>13</sub>	22632.77 .08
	2 <sub>20</sub> - 3 <sub>21</sub>	23140.72 .06
	2 <sub>21</sub> - 3 <sub>22</sub>	23133.36 .06
CHD = CHBr <sup>81</sup>		
-Cis	1 <sub>01</sub> - 2 <sub>02</sub>	15330.96 .05
	1 <sub>10</sub> - 2 <sub>11</sub>	15661.85 .04
	1 <sub>11</sub> - 2 <sub>12</sub>	15004.18 .06
	2 <sub>02</sub> - 3 <sub>03</sub>	22990.63 .04
	2 <sub>11</sub> - 3 <sub>12</sub>	23490.67 .07
	2 <sub>12</sub> - 3 <sub>13</sub>	22504.70 .05
	2 <sub>20</sub> - 3 <sub>21</sub>	23007.09 .08
	2 <sub>21</sub> - 3 <sub>22</sub>	22999.86 .07
CHD = CHBr <sup>79</sup>		
-trans	1 <sub>01</sub> - 2 <sub>02</sub>	14826.14 .06
	1 <sub>10</sub> - 2 <sub>11</sub>	15083.70 .07
	1 <sub>11</sub> - 2 <sub>12</sub>	14571.50 .05
	2 <sub>02</sub> - 3 <sub>03</sub>	22236.53 .1
	2 <sub>11</sub> - 3 <sub>12</sub>	22624.10 .04
	2 <sub>12</sub> - 3 <sub>13</sub>	21856.51 .08
	2 <sub>20</sub> - 3 <sub>21</sub>	22245.32 .04
	2 <sub>21</sub> - 3 <sub>22</sub>	22241.69 .04
CHD = CHBr <sup>81</sup>		
-trans	1 <sub>01</sub> - 2 <sub>02</sub>	14741.07 0.05
	1 <sub>10</sub> - 2 <sub>11</sub>	14995.68 .04
	1 <sub>11</sub> - 2 <sub>12</sub>	14488.07 .06
	2 <sub>02</sub> - 3 <sub>03</sub>	22108.79 .06
	2 <sub>11</sub> - 3 <sub>12</sub>	22491.90 .06
	2 <sub>12</sub> - 3 <sub>13</sub>	21733.35 .07
	2 <sub>20</sub> - 3 <sub>21</sub>	22117.13 .06
	2 <sub>21</sub> - 3 <sub>22</sub>	22113.79 .06
CHD = CDBr <sup>79</sup>		
-Cis	1 <sub>01</sub> - 2 <sub>02</sub>	14523.38 .04
	1 <sub>10</sub> - 2 <sub>11</sub>	14837.07 .04
	1 <sub>11</sub> - 2 <sub>12</sub>	14213.95 .05
	2 <sub>02</sub> - 3 <sub>03</sub>	21779.57 .06
	2 <sub>11</sub> - 3 <sub>12</sub>	22253.42 .06
	2 <sub>12</sub> - 3 <sub>13</sub>	21319.36 .05
	2 <sub>20</sub> - 3 <sub>21</sub>	21795.45 .04
	2 <sub>21</sub> - 3 <sub>22</sub>	21788.03 .04

TABLEAU II  
Fréquences de rotation (suite)

Molécule	Transition	$\nu_{\text{rot.}} (\text{Mc/s})$	
CHD = CDBr <sup>81</sup> -Cis	1 <sub>01</sub> - 2 <sub>02</sub>	14438.20	.04
	1 <sub>10</sub> - 2 <sub>11</sub>	14747.95	.04
	1 <sub>11</sub> - 2 <sub>12</sub>	14132.47	.05
	2 <sub>02</sub> - 3 <sub>03</sub>	21651.91	.04
	2 <sub>11</sub> - 3 <sub>12</sub>	22120.00	.06
	2 <sub>12</sub> - 3 <sub>13</sub>	21196.72	.05
	2 <sub>20</sub> - 3 <sub>21</sub>	21667.30	.04
	2 <sub>21</sub> - 3 <sub>22</sub>	21660.16	.04
	1 <sub>01</sub> - 2 <sub>02</sub>	15094.31 ± 0.05	
	1 <sub>10</sub> - 2 <sub>11</sub>	15491.73	.06
CHD = CDBr <sup>79</sup> -trans	1 <sub>11</sub> - 2 <sub>12</sub>	14704.98	.06
	2 <sub>02</sub> - 3 <sub>03</sub>	22631.95	.04
	2 <sub>11</sub> - 3 <sub>12</sub>	23234.53	.04
	2 <sub>12</sub> - 3 <sub>13</sub>	22054.15	.05
	2 <sub>20</sub> - 3 <sub>21</sub>	22661.15	.04
	2 <sub>21</sub> - 3 <sub>22</sub>	22646.88	.04
	1 <sub>01</sub> - 2 <sub>02</sub>	15005.28	.07
	1 <sub>10</sub> - 2 <sub>11</sub>	15398.28	.05
	1 <sub>11</sub> - 2 <sub>12</sub>	14620.65	.04
	2 <sub>02</sub> - 3 <sub>03</sub>	22498.94	.04
CHD = CD <sub>2</sub> Br <sup>81</sup> -trans	2 <sub>11</sub> - 3 <sub>12</sub>	23094.27	.05
	2 <sub>12</sub> - 3 <sub>13</sub>	21927.64	.04
	2 <sub>20</sub> - 3 <sub>21</sub>	22527.26	.04
	2 <sub>21</sub> - 3 <sub>22</sub>	22513.63	.04

TABLEAU III  
Constantes de couplage quadripolaire

Molécule		eq <sub>m</sub> Q		$\eta$
CHD = CHBr	79-cis	458.5	± 0.6	-0.108 ± 0.002
	81-cis	383.3	0.6	-0.109 0.002
	79-trans	472.0	0.5	-0.075 0.002
	81-trans	393.8	0.7	-0.073 0.002
CHD = CDBr	79-trans	467.6	0.5	-0.093 0.002
	81-trans	390.5	0.5	-0.087 0.001
	79-cis	479.9	0.5	-0.059 0.002
	81-cis	401.1	0.4	-0.057 0.001

TABLEAU IV  
*Constantes rotationnelles*

Molécule	A (Mc/s)	B	C	D <sub>J</sub>	D <sub>JK</sub>
CHD = CHBr <sup>79</sup> -cis	46792 ± 400	4021.18 ± 2.2	3689.27 ± 2.2	0.014 ± 0.001	-0.059 ± 0.005
CHD = CHBr <sup>81</sup> -cis	45849 ± 400	3997.68 ± 2.2	3668.98 ± 2.2	0.014 ± 0.001	-0.052 ± 0.005
CHD = CHBr <sup>79</sup> -trans	56938 ± 800	3834.85 ± 2.6	3578.90 ± 2.6	0.007 ± 0.001	-0.051 ± 0.003
CHD = CHBr <sup>81</sup> -trans	56649 ± 1000	3812.14 ± 3.4	3558.89 ± 3.4	0.004 ± 0.001	-0.042 ± 0.005
CHD = CDBr <sup>79</sup> -cis	42208 ± 300	3787.16 ± 1.4	3475.72 ± 1.4	0.0125 ± 0.0009	-0.029 ± 0.003
CHD = CDBr <sup>81</sup> -cis	43010 ± 300	3764.00 ± 1.5	3456.25 ± 1.5	0.0145 ± 0.0008	-0.040 ± 0.003
CHD = CDBr <sup>79</sup> -trans	36054 ± 100	3971.36 ± 1	3577.91 ± 1	0.013 ± 0.001	-0.018 ± 0.003
CHD = CDBr <sup>81</sup> -trans	36675 ± 100	3946.87 ± 1	3558.03 ± 1	0.0176 ± 0.0009	-0.033 ± 0.003

TABLEAU V  
*Transitions appartenant à un état excité de vibration*

Molécule	Transit.	$\Delta F$	Observé* (Mc/s)	shift $ \nu^* - \nu_{\text{fond}} $	fréq. rot.*	shift ( $\nu$ rot.)
CHD = CDBr <sup>79</sup> -cis	$2_{11} - 3_{12}$	$7/2 - 9/2$	22226.4	14.4		
		$5/2 - 7/2$	22255.9	14.6	$22238.91 \pm 0.1$	14.51
		$5/2 - 5/2$	22215.9	14.8		
	$2_{12} - 3_{13}$	$7/2 - 9/2$	21285.1	21.4		
		$5/2 - 7/2$	21314.8	21.4	21298.11	0.1
		$5/2 - 5/2$	21271.4	21.4		
		$3/2 - 3/2$	21222.7	21.8		
CHD = CDBr <sup>81</sup> -cis	$2_{11} - 3_{12}$	$7/2 - 9/2$	22094.9	14.6		
		$5/2 - 7/2$	22120.0	14.4	$22105.48 \pm 0.08$	14.52
		$5/2 - 5/2$	22086.4	14.35		
		$3/2 - 3/2$	22048.4	13.7		
	$2_{12} - 3_{13}$	$7/2 - 9/2$	21164.7	21.2		
		$5/2 - 7/2$	21189.5	21.3	$21175.48 \pm 0.07$	21.24
		$5/2 - 5/2$	21153.1	21.5		
		$3/2 - 5/2$	21191.0	21.3		
CHD = CDBr <sup>79</sup> -trans	$2_{11} - 3_{12}$	$7/2 - 9/2$	23206.4	16.2		
		$7/2 - 7/2$	23288.8	16.0	$23218.67 \pm 0.06$	15.86
		$5/2 - 7/2$	23235.6	15.6		
	$2_{12} - 3_{13}$	$7/2 - 9/2$	22017.3	24.0		
		$5/2 - 7/2$	22046.3	25.1	$22029.99 \pm 0.08$	24.16
		$5/2 - 5/2$	22003.4	23.9		
		$3/2 - 3/2$	21955.7	24.1		
CHD = CDBr <sup>81</sup> -trans	$2_{11} - 3_{12}$	$7/2 - 9/2$	23068.2	16.1		
		$5/2 - 7/2$	23092.3	15.9	$23078.40 \pm 0.1$	15.87
		$3/2 - 3/2$	23022.7	16.0		
	$2_{11} - 3_{12}$	$7/2 - 9/2$	23601.7	16.2		
CHD = CHBr <sup>79</sup> -cis	$2_{11} - 3_{12}$	$5/2 - 7/2$	23629.8	16.5	$23613.46 \pm 0.16$	16.34
		$5/2 - 5/2$	23593.4	16.2		
		$3/2 - 3/2$	23549.5	16.2		
		$7/2 - 9/2$	23464.6	16.1		
CHD = CHBr <sup>81</sup> -cis	$2_{11} - 3_{12}$	$5/2 - 7/2$	23488.3	16.1	$23474.5 \pm 0.1$	16.17
		$3/2 - 3/2$	23421.1	16.0		
		$7/2 - 9/2$	22596.5	15.3		
		$7/2 - 7/2$	22680.9	15.0	$22609.13 \pm 0.06$	14.97
CHD = CHBr <sup>79</sup> -trans	$2_{11} - 3_{12}$	$5/2 - 7/2$	22625.9	15.0		
		$5/2 - 5/2$	22587.3	14.8		

TABLEAU V

Transitions appartenant à un état excité de vibration (suite)

Molécule	Transit.	$\Delta F$	Observé* (Mc/s)	shift $\nu^* - \nu_{\text{fond}}$	fréq. rot.	shift ( $\nu$ rot.)
CHD = CHBr <sup>79</sup>	$2_{12} - 3_{13}$	$7/2 - 9/2$	21832.8	21.5		
-trans		$7/2 - 7/2$	21916.3	20.8		
		$5/2 - 7/2$	21853.1	20.0	$21835.52 \pm 0.09$	20.99
		$5/2 - 5/2$	21808.6	21.1		
		$3/2 - 3/2$	21760.0	21.7		
CHD = CHBr <sup>81</sup>	$2_{12} - 3_{13}$	$7/2 - 9/2$	21701.13	21.6		
-trans		$7/2 - 7/2$	21779.4	21.2		
		$5/2 - 7/2$	21725.5	22.1	$21711.81 \pm 0.05$	21.54
		$5/2 - 5/2$	21689.6	21.0		
		$3/2 - 5/2$	21726.7			
		$3/2 - 3/2$	21648.9	21.3		

## RÉFÉRENCES

(<sup>1</sup>) C.D. CORNWELL. — *J. Chem. Phys.* **18**, 1118 (1950).  
— *O.N.R. Report, Iowa State*, 1 jan. 1951.

(<sup>2</sup>) J. CHARETTE et M. DE HEMPTINNE. — *Bull. Acad. Roy. Belg.* 11 oct. 1952.

(<sup>3</sup>) C. MANNEBACK et A. RAHMAN. — *Ann. Soc. Scient. Brux.* LXVII mars 1953.

(<sup>4</sup>) R.E. GOEDERTIER. — *Ann. Soc. Scient. Brux.* **74**, 134 (1960).

(<sup>5</sup>) R.E. GOEDERTIER. — *Bull. Soc. Belg. Phys.* II, n° 4 (1960).

(<sup>6</sup>) R.E. GOEDERTIER. — *Bull. Acad. Roy. Belg.* octobre 1960.

(<sup>7</sup>) A paraître prochainement.

(<sup>8</sup>) R.E. GOEDERTIER. — A paraître prochainement.

(<sup>9</sup>) J. JUNGERS et J. VERHULST. — *Bull. Acad. Roy. Belg.* XXIII, n° 2 (1949).

TABLEAU VI

Constantes de structure hyperfine de l'état excité, - Comparaison avec l'état fondamental

Molécule	Transit.	$\text{eq}_m Q^*$	$\text{eq}_m Q$ fond.	$\eta^*$	$\eta$ fond.
CHD = CDBr <sup>79</sup> -trans	$2_{11} - 3_{12}$ $2_{12} - 3_{13}$	467.2 465.4	$\pm 2.8$ 5.6	472.0 476.8	$\pm 2.3$ 2.8
CHD = CDBr <sup>81</sup> -trans	$2_{11} - 3_{12}$ $2_{12} - 3_{13}$	385.6	5.6	390.8	2.
CHD = CDBr <sup>79</sup> -cis	$2_{11} - 3_{12}$ $2_{12} - 3_{13}$	471.6 479.2	5.6 6.2	481.0 478.5	3.1 2.5
CHD = CDBr <sup>81</sup> -cis	$2_{11} - 3_{12}$ $2_{12} - 3_{13}$	400.6 396.8	5.6 8.5	399.1 399.3	2.3 3.7
CHD = CHBr <sup>79</sup> -cis	$2_{11} - 3_{12}$ $2_{12} - 3_{13}$	465.5	6.3	456.7	2.5
CHD = CHBr <sup>81</sup> -cis	$2_{11} - 3_{12}$ $2_{12} - 3_{13}$	379.2	5.6	379.5	3.7
CHD = CHBr <sup>79</sup> -trans	$2_{11} - 3_{12}$ $2_{12} - 3_{13}$	478.6 484.4	2.5 3.7	472.4 469.0	1.7 4.
CHD = CHBr <sup>81</sup> -trans	$2_{11} - 3_{12}$ $2_{12} - 3_{13}$	401.2	2.3	397.0	4.2

## TABLE DES MATIÈRES DU TOME 75

Manuscrits reçus le 31 janvier 1961.

**PREMIÈRE SECTION :**

**SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES.**

Systèmes matériels de trois masses ponctuelles. Mouvement plan en coordonnées symétriques, par A. DEPRIT et A. DELIE..... 5

**DEUXIÈME SECTION : SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES.**

Sur les aberrations périaxiales de l'œil. II, par A. BIOT..... 45

Session du 20 avril 1961, à Bruxelles.

**PREMIÈRE SECTION :**

**SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES.**

Groupoïdes en relation associative et semigroupes mutuellement associatifs, par A. SADE..... 52

Un modèle mathématique de système à dissipation du type «structurel», par F. BUCKENS ..... 58

**DEUXIÈME SECTION : SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES.**

Sur les aberrations périaxiales de l'œil. III, par A. BIOT..... 79

Sur les aberrations périaxiales de l'œil. IV, par A. BIOT..... 84

Principe d'une méthode d'alignement, par A. BIOT..... 92

Modèles statistiques dans l'étude de la réaction  $\text{Al}^{27} + d \rightarrow \text{Mg}^{25} + x$  par G. DEMORTIER, J.C. JODOGNE et P.C. MACQ..... 94

Diffusion élastique de neutrons de 14 Mev aux petits angles, par G. DECONNINCK, A. MARTEGANI, J.P. MEULDERS et J. STOQUART. 102

Session du 26 octobre 1961, à Louvain

**PREMIÈRE SECTION :**

**SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES**

Entropie demosienne dans un système de relations, par A. SADE ..... 107

Fonctions entières ou plurisousharmoniques de type exponentiel, par J. PARIS ..... 113

Laguerre's Function for a Curve in a Hypersurface  $V_n$  of a Riemannian  $V_{n\pm 1}$ , by M.K. SINGAL ..... 123

Sur la statistique du vent, par O. GODART. ..... 128

Le coefficient d'échange de la diffusion atmosphérique, par O. GODART. 148

## DEUXIÈME SECTION : SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES

Un oculaire compensateur de mesure du type Huyghens pour objectifs apochromatiques de microscope, par A. BIOT .....	160
Un oculaire du type Huyghens à lentille de champ achromatisée, par A. BIOT .....	164
L'aberration chromatique latérale de l'oculaire de Ramsden, par A. BIOT.	167
Mesures de corrélation angulaire polarisé $\beta-\gamma$ circulaire sur $\text{Re}^{186}$ , par M. DELABAYE, J. DEUTSCH et P. LIPNIK .....	171
Spectre de rotation du bromure de vinyle enrichi en Carbone 13, par R.E. GOEDERTIER .....	174
Remarques sur les spectres infrarouges des bromures de vinyle deutéro-substitués, par C.P. COURTOY .....	183
Une méthode de mesure des sections efficaces d'échange de charge, par J. STEYAERT, J. BOUCHAT et J.M. DELFOSSE .....	188
Corrélation directionnelle bêta-gamma dans $\text{Ho}^{166}$ , par J.P. DEUTSCH, L. GRENAKS et P. LIPNIK .....	191
Spectres de rotation des bromures de vinyle en micro-ondes dans l'état fondamental et dans un état vibrationnel excité, par S. de HEPCEÉ.	194
Table des Matières du tome 75 .....	212

## AUTEURS

A. BIOT, 45, 79, 84, 92, 160, 164, 167 — J. BOUCHAT, 188 — F. BUCKENS, 58 — C.P. COURTOY, 183 — G. DECONNINCK, 102 — S. de HEPCEÉ, 194 — M. DELABAYE, 171 — A. DELIE, 5 — J.M. DELFOSSE, 188 — G. DEMORTIER, 94 — A. DEPRIT, 5 — J.P. DEUTSCH, 171, 191 — O. GODART, 128, 148 — R.E. GOEDERTIER, 174 — L. GRENAKS, 191 — J.C. JODOGNE, 94 — P. LIPNIK, 171, 191 — P.C. MACQ, 94 — A. MARTEGANI, 102 — J.P. MEULDERS, 102 — J. PARIS, 113 — A. SADE, 52, 107 — M.K. SINGAL, 123 — J. STEYAERT, 188 — J. STOQUART, 102.

## DATES DE PUBLICATION

1<sup>er</sup> et 2<sup>me</sup> fasc. pp. 1 à 106 : 15 juin 1961  
3<sup>me</sup> fasc. pp. 107 à 213 : 7 décembre 1961

(T. 121)      Imprimerie Ceuterick, s.c., 153, rue de Bruxelles, Louvain  
Dir. L. Pitsi, 25, rue Dagobert, Louvain (Belgique)

# Revue des Questions Scientifiques

Cette revue, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de cinq séries : la première série comprend 30 volumes (1877-1891); la deuxième, 20 volumes (1892-1901); la troisième, 30 volumes (1902-1921); la quatrième, 30 vol. (1922-1936) La livraison de janvier 1937 inaugura la cinquième série.

La revue fut interrompue par la guerre, après le deuxième fascicule, avril 1940, du tome 117 de la collection. Ce tome fut achevé par les fascicules de février et juillet 1946.

Depuis 1947, paraît chaque année un volume, en quatre fascicules d'environ 160 pages chacun, 20 janvier, 20 avril, 20 juillet, 20 octobre.

Depuis 1947 la Revue est aussi l'organe de l'UNION CATHOLIQUE DES SCIENTIFIQUES FRANÇAIS.

*Administration et Rédaction: 11, rue des Récollets, Louvain (Belgique)*

## PRIX D'ABONNEMENT

Belgique et Grand-Duché de Luxembourg . . . . .	200 francs belges
abonnement de soutien . . . . .	500 francs belges
abonnement d'honneur . . . . .	1000 francs belges
France et Union française (s'adresser à la librairie Masson, 120, boulevard St. Germain, Paris 6 <sup>e</sup> ) . . .	2160 francs franç.
Autres pays (s'adresser au Secrétariat, à Louvain) . . .	280 francs belges

# PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

## EXTRAIT DU CATALOGUE

### ANNALES DE LA SOCIETE SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,

t. I à XLVI, 1875 à 1926. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages . . . F 150,00

### ANNALES DE LA SOCIETE SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,

Série A (sc. mathématiques), t. XLVII à LVI (1927 à 1936) . . . . . F 70,00

Série B (sc. physiques et naturelles) » » » F 70,00

Série C (sc. médicales) (1927 et 1928) F 100,00 — (1929 à 1936) F 40,00

Série D (sc. économ. et techniques) (1927 à 1929) F 20,00 — (1930 à 1936) F 60,00

Série I (sc. mathématiques et physiques), tt. LVII à LXVII (1937 à 1953) F 70,00

tt. LXVIII à LXXII (1954 à 1958) F 100,00

tt. LXXIII et LXXV (1959 et 1961) F 150,00

Série II (sc. naturelles et médicales), tt. LVII à LX (1937 à 1940, 46) F 70,00

Série III (sc. économiques), tt. LVII à LX (1937 à 1940, 46) . . . . . F 100,00

### REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES,

t. I à XCII (1877 à 1927). Les deux volumes annuels . . . . . F 200,00

Le fascicule trimestriel . . . . . F 60,00

t. XCIII à CXVI (1928 à 1939). Les deux volumes annuels . . . . . F 200,00

Le fascicule . . . . . F 40,00

t. CXVII (1940 et 1946), tt. CXVIII à CXXXII (1947 à 1961) Le volume F 200,00

Le fascicule . . . . . F 60,00

### TABLES ANALYTIQUES DES ANNALES,

t. I à XXV (1875 à 1901) . . . . . F 20,00

t. XXVI à XLVI (1902 à 1926) . . . . . F 40,00

### TABLES ANALYTIQUES DE LA REVUE,

t. I à L (1877 à 1901) . . . . . F 20,00

t. LI à LXXX (1902 à 1921) . . . . . F 20,00

t. LXXXI à CX (1922 à 1936) . . . . . F 30,00

### MONOGRAPHIES DE SCIENCES NATURELLES

I — B. Tougarinoff. Les réactions organiques dans l'analyse qualitative minérale (cations). — Un vol. in-8° de 107 pages (1930) : en Belgique, F 24,00; autres pays : F 30,00.

II — V. Schaffers. Le paratonnerre et ses progrès récents. Un vol. in-8° de 90 pages (1931) : en Belgique, F 24,00; autres pays : F 30,00.

IV — F. Kaisin et E. de Pierpont. — Hydrogéologie des Calcaires de la Belgique. Un vol. in-8° de 111 pages, avec 35 fig. et un plan hors texte (1939) : en Belgique, F 24,00; autres pays, F 30,00.

V — R. Delhez. — Table des solubilités des sels usuels à l'usage du chimiste praticien : F 10,00.

### MONOGRAPHIES MEDICALES

I — M. Schillings. Le rein en fer à cheval. Un vol. in-8° de 104 pages, avec 8 planches hors-texte (1938) : en Belgique, F 70,00; autres pays, F 90,00.

III — P. Van Gehuchten. La pathologie du système pallido-strié. Un vol. in-8° de 52 pages, avec 8 planches hors-texte (1930) : en Belgique, F 24,00; autres pays, F 30,00.

### MONOGRAPHIES DES SCIENCES ECONOMIQUES

I — A. Henry. La structure technique de l'agriculture belge et ses particularités en Wallonie et en Flandre. Un vol. de 66 pages . . . . . F 20,00

II — A. Henry. Les variations régionales de l'Agriculture en Belgique. Un vol. de 50 pages . . . . . F 10,00

III — A. Delpérée. La réglementation conventionnelle des conditions de travail en Belgique. Un vol. de 200 pages . . . . . F 60,00